

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В.И. Иевлев

**АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА
ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Учебное пособие

Научный редактор доц., канд. техн. наук Г.П. Менщиков

Екатеринбург
УрФУ
2010

УДК 621.396.6 : 658.562(075.08)

ББК 32.85я73+30.607я73

ИЗО

Рецензенты: кафедра общетехнических дисциплин УрТИСИ
(зав. каф., проф. д-р техн. наук Б.А. Панченко),
проф. д-р техн. наук Г.А. Филиппов
(АИН им. А.М. Прохорова)

Иевлев В.И.

ИЗО Анализ точности производства электронных средств : учебное пособие /
В. И. Иевлев. Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2010. 103 с.
ISBN 978-5-321-01863-7

Рассмотрены методы получения вероятностных математических моделей, описывающих процессы образования погрешностей параметров электронных средств. Приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований производственных погрешностей, а также примеры конструкторских и технологических расчетов точности параметров многослойных печатных плат.

Для студентов, обучающихся по магистерской программе направления 211000 – Конструирование и технология электронных средств.
Библиогр.: 15 назв. Табл. 16. Рис. 38. Прил. 1.

УДК 621.396.6 : 658.562(075.08)
ББК 32.85я73+30.607я73

ISBN 978-5-321-01863-7

© УрФУ, 2010
© Иевлев В.И., 2010

ПРЕДИСЛОВИЕ

Среди многочисленных задач, решаемых инженером-технологом, наиболее важной является разработка технологических процессов (ТП) изготовления изделий с заданными параметрами качества при минимальной себестоимости.

Особенностями современных ТП изготовления электронных средств (ЭС) принято считать:

- высокую сложность и многооперационность;
- использование прогрессивных (но не редко еще малоизученных) физико-химических методов формообразования и обработки;
- необходимость изготовления изделий с жесткими допусками на выходные параметры;
- высокую стоимость используемого технологического оборудования.

Согласно Федеральному государственному образовательному стандарту по подготовке магистров направления "Конструирование и технология электронных средств" выпускники должны быть подготовлены к решению таких задач, как разработка физических и математических моделей технологических процессов с целью анализа и оптимизации их параметров.

Учебное пособие написано по материалам лекций по соответствующим дисциплинам, читаемых автором, с использованием результатов экспериментальных исследований, выполненных в реальных производственных условиях.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ¹

Под точностью производства понимают меру соответствия объекта (изделия, процесса) установленному образцу [15].

В качестве критериев точности обычно рассматривается степень соответствия параметров, характеризующих изделие или процесс (электрических,

¹ Стандартные термины и определения приведены в приложении.

механических, химических, тепловых, оптических и др.), установленному диапазону значений этих параметров, который называют допуском.

Различают точность функциональную (или конструкторскую) и технологическую.

Под функциональной (или конструкторской) точностью понимают точность, предъявляемую к выходным параметрам аппаратуры и обеспечивающую ее нормальное функционирование в соответствии с техническими условиями. Технологическая точность – это реально достижимая (не планируемая) точность при производстве изделия по выбранной технологии. Технологическая точность может быть как выше, так и ниже функциональной.

С рассмотренными понятиями точности и допуска связаны понятия погрешности и стабильности ТП.

Погрешности, возникающие при выполнении отдельных технологических операций, называют *операционными*. Погрешности параметров готовых изделий при многооперационном ТП их изготовления называют *суммарными*. При анализе точности ТП в составе последних выделяют: активно-формирующие, активно-преобразующие и пассивные операции.

Активно-формирующие операции (АФО) – операции, при выполнении которых формируется искомый параметр с соответствующей погрешностью.

Активно-преобразующие операции (АПО) – операции, при выполнении которых изменяется величина параметра и соответственно его погрешность.

Прочие технологические операции, не влияющие на исследуемый параметр, называют *пассивными*. Например, очистка печатных плат после травления фольги не влияет на ширину зазора между проводниками (т.е. применительно к этому параметру считается пассивной), но влияет на сопротивление изоляции между проводниками (т.е. применительно к этому параметру считается активно-преобразующей операцией).

В условиях серийного и массового производства значения выходных параметров ЭС имеют некоторый разброс, обусловленный нестабильностью

свойств исходных материалов (заготовок, полуфабрикатов) и самого ТП. Разброс значений параметров (или погрешностей этих параметров - δ), полученных экспериментально, характеризуется гистограммой (рис. 1.1) и выборочными числовыми характеристиками: средним арифметическим $\bar{\delta}$ и дисперсией $s^2(\delta)$.

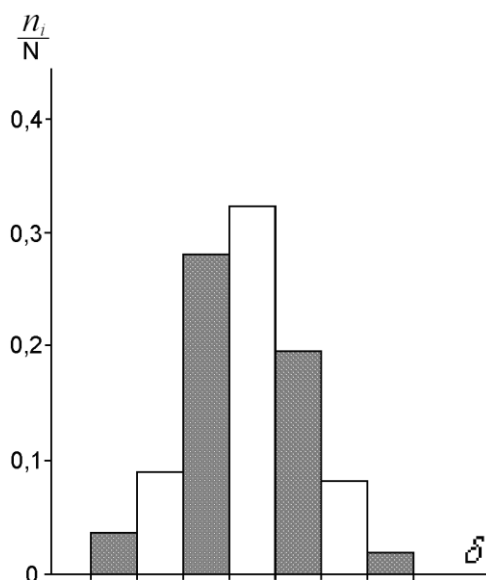


Рис. 1.1. Гистограмма экспериментальных значений погрешности δ
(n_i/N — относительная частота)

Для стабильного ТП вид гистограммы и численные значения $\bar{\delta}$ и $s^2(\delta)$ для партий изделий, изготовленных в разное время (t_0, t_i, t_k), не изменяются (или изменяются незначительно, рис. 1.2).

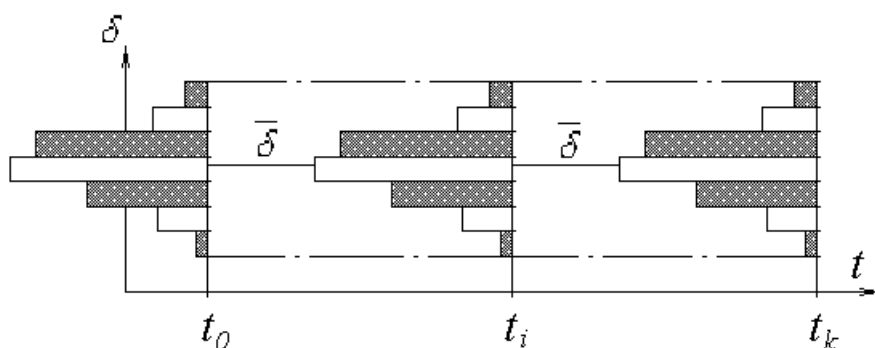


Рис. 1.2. Точностная диаграмма стабильного технологического процесса

Под *анализом точности* понимается процесс изучения причин возникновения погрешностей, методов их исследования и количественных оценок, способов предупреждения и устранения. *Основной задачей анализа точно-*

сти ТП является определение погрешностей выходных параметров изделия, изготовленного по этому процессу. Каким образом могут быть решены подобные задачи? Очевидно, что самое верное решение такой задачи будет получено после контроля одной или нескольких партий изделия, изготовленных по реальному процессу. Однако создавать реальные (как правило, довольно дорогостоящие) технологические процессы изготовления ЭС целесообразно, лишь будучи достаточно уверенным, что получим изделия с характеристиками качества, близкими к ожидаемым. Поэтому на проектных и предпроектных стадиях разработки ТП важное место занимает моделирование, используя которое производят анализ предполагаемых вариантов построения процессов.

Моделирование представляет собой метод научного познания, при котором исследуемый объект заменяется другим, как правило, более простым, называемым моделью. Изучение модели дает возможность получить новую и ранее неизвестную информацию об исходном объекте.

Основанием для получения модели обычно являются ранее проведенные исследования изучаемого ТП, а также – процессов-аналогов. Таким образом, *модель строится на основе прошлого (опыта), чтобы предсказывать (прогнозировать) будущее*. В какой степени информация, полученная по модели, будет соответствовать информации, полученной с реального объекта? Очевидно, что тем точнее, чем в большей степени модель соответствует объекту или, как говорят, модель адекватная (изоморфна). Однако абсолютного соответствия быть не может, поскольку модель, как и вся совокупность наших знаний об окружающем нас мире не может быть абсолютно точными и полными.

Любое новое исследование изучаемого объекта приносит новые знания о нем. Поэтому говорят, что даже отрицательный результат – тоже результат.

Для ТП применяют в основном два вида моделирования: физическое и математическое. Чаще используют математическое моделирование, которое обладает широкими возможностями и большей доступностью.

Под математической моделью ТП производства ЭС понимают совокупность соотношений (например, формул, уравнений, неравенств, логических условий, операторов и т.д.), определяющих характеристики функционирования процесса в зависимости от его параметров, входных переменных, времени и т.д.

Современные ТП изготовления ЭС характеризуются как сложные и наукоемкие производства. При математическом моделировании таких процессов учитывают следующие их особенности:

- наличие значительного числа разнообразных факторов, влияющих на процесс;
- большое количество внутренних связей между параметрами и их сложное взаимное влияние;
- развитие различных направлений процесса, конкурирующих между собой и определяющих его ход;
- воздействие на процесс большого числа неконтролируемых и неуправляемых факторов, играющих роль возмущений.

Исходную (или базовую) модель ТП обычно представляют в виде объекта типа «черный ящик» [5, 6] (рис. 1.3).

Состояние объекта типа «черный ящик» характеризует n -мерный вектор \mathbf{Y} , называемый выходом системы. Он представляет собой функцию трех групп входных параметров:

- 1-я группа – k -мерный вектор \mathbf{W} – группа управляемых входных параметров;
- 2-я группа – p -мерный вектор \mathbf{X} – группа контролируемых, но не управляемых параметров;
- 3-я группа – m - мерный вектор \mathbf{Z} – группа неконтролируемых, а, следовательно, и неуправляемых параметров.

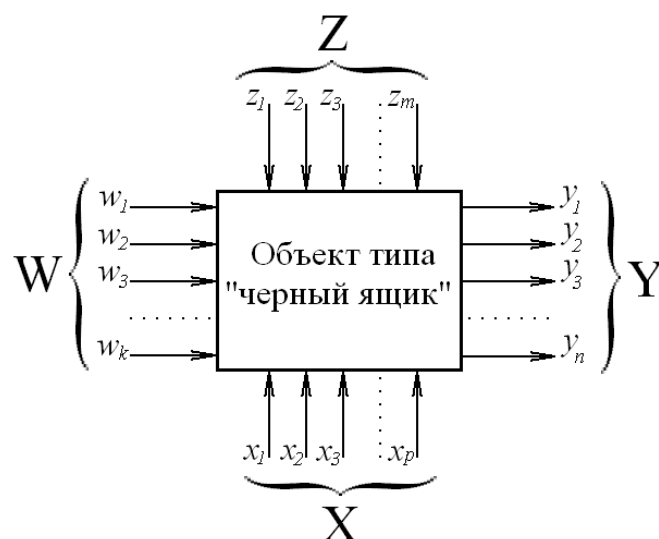


Рис. 1.3. Технологический процесс как объект типа «черный ящик»

ТП серийного и массового производства ЭС характеризуются тем, что каждая отдельно взятая операция и весь процесс в целом совершаются примерно в одних и тех же производственных условиях. Поэтому эти процессы можно рассматривать как сложные преобразующие системы (объекты) с большим числом входных и выходных переменных, носящих случайный характер. Следовательно, производственные погрешности ТП серийного и массового производства могут рассматриваться как случайные величины, описываемые вероятностными (теоретическими) и статистическими (экспериментальными) методами.

Известно, что исчерпывающей характеристикой случайной величины является закон ее распределения с конкретными значениями соответствующих параметров. Таким образом, анализ точности технологических процессов серийного и массового производства обычно сводится к нахождению законов распределения погрешностей выходных параметров.

Центральное место при решении задач анализа и расчета точности производства занимает разработка математических моделей (математического описания) закономерностей отдельных операций и ТП в целом.

Результатом формализации ТП по критерию точности в условиях серийного и массового производства является *вероятностная математическая модель*, которая представляет собой аналитические выражения, устанавливающие

ливающие взаимосвязи между законами распределения, числовыми характеристиками и практическими полями рассеивания погрешностей входных и выходных параметров.

Одним из главных назначений вероятностных математических моделей является прогнозирующий расчет точности отдельных операций или ТП в целом при различных исходных данных.

На основе вероятностных математических моделей могут решаться следующие два вида задач:

1) определение числовых характеристик и законов распределения выходных параметров по известным числовым характеристикам и законам распределения входных переменных (задача анализа погрешностей);

2) отыскание числовых характеристик распределения входных переменных по известным числовым характеристикам выходных переменных (задача синтеза погрешностей).

Кроме того, исследования в области точности позволяют обоснованно подойти к разработке оптимальных систем автоматического управления ТП для получения высококачественной продукции при минимальных затратах на производство.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОЧНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

2.1. Общие положения

В теории точности машино- и приборостроения наиболее достоверным и наглядным методом расчета производственных погрешностей признан метод, основанный на применении вероятностных математических моделей, которые позволяют с большой степенью адекватности описывать ТП в условиях серийного и массового производства.

Для построения вероятностных математических моделей применяются методы теории вероятностей и математической статистики. Вероятностные и статистические методы построения математических моделей ТП находятся в

тесной взаимосвязи друг с другом, так как теоретические модели требуют экспериментальной проверки, а экспериментальные исследования не могут быть поставлены без соответствующей теоретической предпосылки.

При построении вероятностных математических моделей точности ТП производства ЭС обычно встречаются два вида задач.

Первый вид задач предполагает известной функциональную зависимость между входными и выходными параметрами. В этих задачах влияние факторов группы **Z** считаем не существенным и им пренебрегаем. Например, сопротивление тонкопленочных резисторов R обычно определяется формулой

$$R = \frac{\rho l}{b h}, \quad (2.1)$$

где ρ – удельное сопротивление материала; l , b , h – соответственно длина, ширина и толщина резистора.

В условиях серийного и массового производства параметры ρ , l , b и h могут рассматриваться как случайные контролируемые, но неуправляемые (т.е. факторы группы X). Если произвести измерения этих параметров у N резисторов, то получим совокупность их значений ρ_i , l_i , b_i , h_i ($i = \overline{1, N}$). Подставляя эти значения в формулу (2.1), получим совокупность рассчитанных значений $R_i^{расч}$, ($i = \overline{1, N}$). Измерив сопротивление N резисторов, получим совокупность измеренных значений $R_i^{изм}$ ($i = \overline{1, N}$). Если обе эти совокупности идентичны, то модель (2.1) адекватна. Противоположный случай означает, что в модели (2.10) не были учтены какие-то факторы (например, влияние шероховатости подложки, погрешностей измерений, формы резистора и т.д.). На первых порах эти факторы относят к группе **Z** (в таких случаях говорят, что случайность – непознанная закономерность). В дальнейшем, если влияние этих факторов будет признано существенным, они также могут быть включены в модель.

В результате решения подобных задач должна быть получена математическая модель, представляющая собой аналитические выражения, устанавли-

ливающие взаимосвязи между законами распределения, числовыми характеристиками и практическими полями рассеивания входных (в примере ρ , l , b и h) и выходных (в примере – R) параметров.

Ко второй группе относят задачи, при постановке которых зависимость между входными и выходными параметрами еще до конца не выяснена и ее требуется установить и исследовать. Такие задачи при формализации ТП производства ЭС встречаются наиболее часто.

2.2. Этапы и методы построения математических моделей точности технологических процессов

Этапы:

1. Отбор факторов (входных переменных).
2. Установление типа зависимости между исходными факторами и погрешностями обработки.
3. Построение математической модели.
4. Проверка адекватности разработанной модели и реального технологического процесса.

2.2.1. Отбор факторов (входных переменных)

Успех исследования в значительной степени определяют отбор и описание исходных факторов. Входные переменные для включения их в математическую модель должны выбираться на основе предварительного теоретического анализа, исходя из целей и задач исследования. Как правило, на этом этапе анализируются и обобщаются результаты ранее проведенных исследований таких же процессов или процессов-аналогов.

При отборе факторов к ним предъявляется ряд требований. Прежде всего, технологические факторы должны быть количественно измерены. Если фактор характеризуется только качественными показателями, то учет его влияния, как правило, затруднен либо вообще невозможен.

Перечень входных переменных должен включать в себя важнейшие факторы, оказывающие наиболее существенное влияние на точность обработки. Это требование вытекает из того, что при моделировании необходимо абстрагироваться от влияния несущественных факторов. Кроме того, модель должна быть простой и наглядной.

Исходные факторы не должны находиться между собой в точной (функциональной) зависимости, так как существование функциональных и близких к ним связей показывает, что они характеризуют одну и ту же сторону изучаемой первичной погрешности и, следовательно, в какой-то мере дублируют друг друга.

На начальной стадии исследования большое значение приобретает вопрос о правильной классификации исходных факторов и выбора для них математической модели. Обычно факторы классифицируют на систематические (неслучайные) и случайные.

Систематические факторы, в свою очередь, делятся на постоянные, принимающие вполне определенные числовые значения при обработке каждого последующего элемента, и переменные, закономерно изменяющиеся при переходе от одного элемента к другому. Случайные факторы могут принимать то или иное числовое значение, заранее не известно какое именно, при повторном воспроизведении комплекса условий их возникновения. Эти факторы могут быть выражены случайными величинами или случайными функциями.

Иногда один и тот же фактор в разных задачах может рассматриваться неодинаково. Например, если для одной задачи разброс значений этого фактора можно считать несущественным, то в модель его включают как константу, в противном случае – как переменную или случайную величину.

Операционные погрешности, в свою очередь, также относят либо к систематическим (постоянным или переменным), либо к случайным, в зависимости от того, влияние каких из перечисленных факторов является доминирующим в их появлении.

На стадии отбора факторов требуется установить их области определения. Для случайных факторов это связано с установлением законов распределения.

В качестве математических моделей для описания случайных факторов при решении задач анализа точности технологических процессов наиболее часто используются теоретические законы распределения, такие как закон равной вероятности, закон Гаусса и др.

Закон равной вероятности описывает распределение как непрерывной, так и дискретной случайной величины, которая может принимать допустимые значения с равной вероятностью.

Плотность вероятности распределения непрерывной случайной величины (например, X) может быть выражена:

а) аналитически

$$\varphi\{x\} = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{при } x > b, \end{cases}$$

где $b - a = 2l$ – область возможных значений случайной величины X ; математическое ожидание и дисперсия соответственно равны

$$m\{X\} = \frac{a+b}{2}; \quad \sigma^2\{X\} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{l^2}{3};$$

б) графически (рис. 2.1).

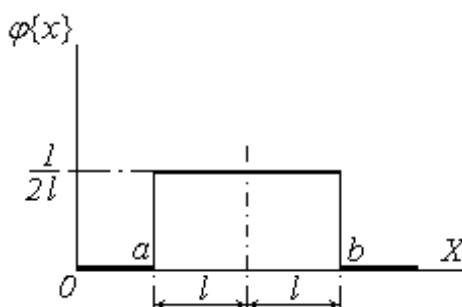


Рис. 2.1. Плотность вероятности равномерного распределения непрерывной случайной величины

Плотность вероятности распределения дискретной случайной величины (например, X) может быть выражена:

а) в виде таблицы

$p(x_i)$	$1/n$	$1/n$	$1/n$	$1/n$	$1/n$
X	x_1	x_2	x_3	\dots	x_n

б) графически (например, в виде столбиковой диаграммы, рис. 2.2).

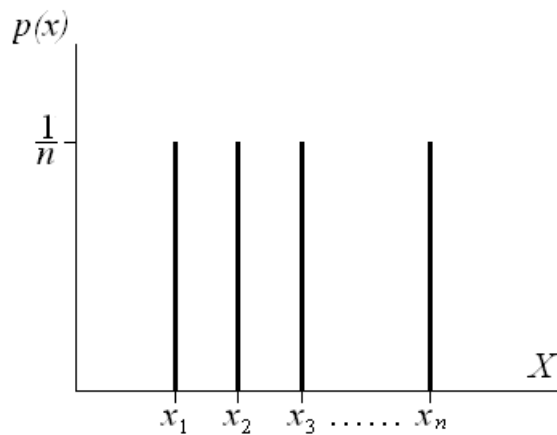


Рис. 2.2. Плотность вероятности равномерного распределения дискретной случайной величины

Закон равной вероятности обычно рассматривается как исходный для получения некоторых других распределений аналитически или моделированием на ЭВМ (параграф 2.2.3).

Закон нормального распределения (закон Гаусса) описывает распределение непрерывной случайной величины, которая может принимать значения в диапазоне от $-\infty$ до $+\infty$, причем ее отклонения от некоторого среднего значения (математического ожидания) подчиняются следующим правилам:

- отрицательные и положительные отклонения, равные по модулю, равновероятны;
- чем больше (по модулю) отклонение, тем оно менее вероятно.

Плотность вероятности нормального распределения случайной величины (например, X) имеет вид:

а) аналитически

$$\varphi\{x\} = \frac{1}{\sigma\{X\}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - m\{X\})^2}{2\sigma^2\{X\}}\right],$$

где $m\{X\}$ и $\sigma^2\{X\}$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия;

б) графически (рис. 2.3).

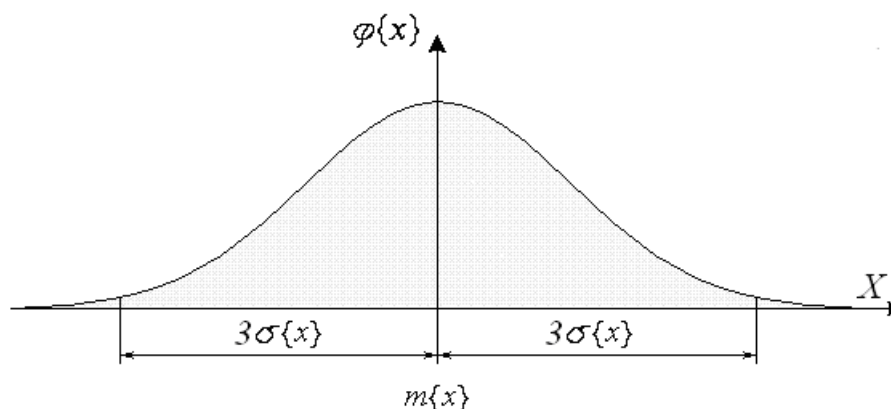


Рис. 2.3. Плотность вероятности распределения Гаусса

В технических приложениях из теоретических законов распределения закон Гаусса является самым распространенным. Его обычно используют для описания разброса значений параметров изделий, изготовленных в условиях серийного и массового производства. Часто гауссов закон встречается при обработке результатов различного рода измерений [8].

Применяя закон Гаусса, исследователи часто совершают две основные ошибки:

- 1) не всегда достаточно обосновывают выбор формулы Гаусса в качестве математической модели;
- 2) не учитывают, что формула Гаусса – это всего лишь математическая модель.

Как правило, основным (а часто и единственным) доводом в пользу выбора нормального распределения является колоколообразная форма экспериментальной гистограммы (например, рис. 1.1). При этом совершенно не учитывается тот факт, что погрешности изготовления или измерения не могут принимать сколь угодно большие (по модулю) значения. Формула Гаусса достаточно хорошо согласуется с экспериментом в диапазоне значений, не

превышающих $\pm 3\sigma\{X\}$ (относительно $m\{X\}$). В этот диапазон попадает 99,73% всех значений случайной величины (например, X). Но если по этой модели строить прогнозирующие расчеты вне этого диапазона, то результат будет резко расходиться с реальностью (см. подглаву 5.5).

Большинство исследователей, применяя нормальный закон распределения, предполагают его справедливость само собою разумеющейся. В действительности дело обстоит сложнее. В свое время по поводу этого закона было достаточно точно, хотя не без сарказма, сказано, что «экспериментаторы верят в него, полагаясь на доказательства математиков, а математики — полагаясь на экспериментальное обоснование»[8]. Что же касается экспериментальных обоснований, то они ничего не дают, кроме гистограммы, и всегда можно подобрать достаточно хорошую интерполирующую функцию, которая для данного случая будет представлять более адекватную модель. Например, при решении некоторых практических задач (см. подглаву 5.5) лучшее совпадение с экспериментом дает применение распределения.

$$\varphi\{x\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{x-m\{X\}}{\sigma\{X\}} < -3 \text{ и } \frac{x-m\{X\}}{\sigma\{X\}} > 3, \\ \frac{1}{16 \cdot \sigma\{X\}} \cdot \left(\frac{x+m\{X\}}{\sigma\{X\}} + 3 \right)^2 & \text{при } -3 \leq \frac{x+m\{X\}}{\sigma\{X\}} \leq 1, \\ \frac{1}{8 \cdot \sigma\{X\}} \cdot \left[3 - \left(\frac{x-m\{X\}}{\sigma\{X\}} \right)^2 \right] & \text{при } -1 \leq \frac{x-m\{X\}}{\sigma\{X\}} \leq 1, \\ \frac{1}{16 \cdot \sigma\{X\}} \cdot \left(\frac{x-m\{X\}}{\sigma\{X\}} - 3 \right)^2 & \text{при } 1 \leq \frac{x-m\{X\}}{\sigma\{X\}} \leq 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

Сравнение кривых Гаусса и (2.2) приведено на рис. 2.4.

Распределение (2.2) практически не отличается от нормального, но в границах $\pm 3\sigma\{X\}$ находится 100 % всех значений величины X .

Ошибочному выбору математической модели нередко способствуют приводимые в технической литературе (в т.ч. и в фундаментальной, например [11, с. 49, 51]) некорректные высказывания типа «погрешности *подчи-*

няются» (выделено автором) тому или иному закону распределения (Гаусса, Релея и т.д.). Погрешности (какими бы они ни были) подчиняются своим законам (законам объективного мира)! А теоретические законы распределения (в т.ч. и Гаусса) – это лишь применяемые нами математические модели, которые (в силу своего определения) не могут быть абсолютно точными (адекватными).

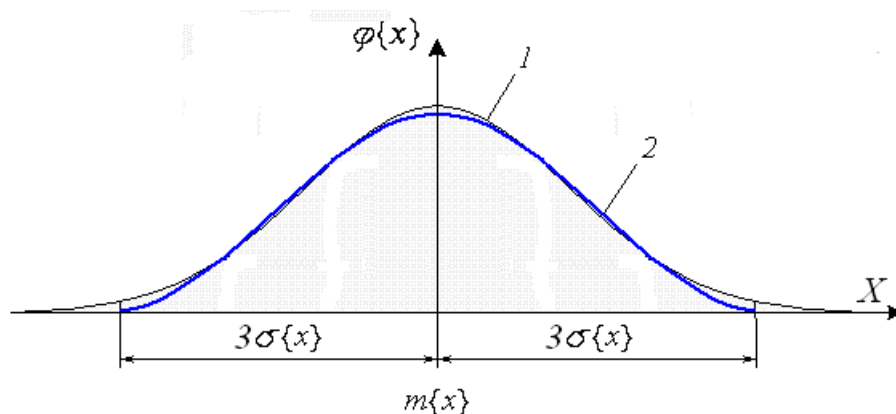


Рис. 2.4. Сравнение распределения Гаусса (1) и распределения (2.2) -2

2.2.2. Установление типа зависимости между исходными факторами и погрешностями обработки

Реальные процессы, происходящие в объективном мире. Характеризуются высокой сложностью, взаимосвязанностью и взаимообусловленностью. В процессе построения математических моделей приходится абстрагироваться от действительного положения вещей и учитывать только наиболее существенные стороны изучаемых явлений. Поэтому при анализе и формализации технологических процессов предполагается, что исследуемые величины либо независимы между собой, либо связаны одной из следующих зависимостей:

- функциональной;
- вероятностной (стохастической).

Рассмотрим эти виды связей применительно к двум переменным: X (или W), с одной стороны, и Y – с другой.

Функциональная зависимость. При функциональной зависимости между двумя переменными, изменяющимися как систематически, так и случайно, каждому значению одной величины (аргумента) соответствует одно вполне определенное значение другой величины (функции), т.е. влиянием факторов Z можно пренебречь. Это определение можно проиллюстрировать таблицей, приведенной ниже, и графиком (рис. 2.5),

Вход	Выход
x_1 или w_1	y_1
x_2 или w_2	y_2
...	...
x_i или w_i	y_i
...	...
x_n или w_n	y_n

где x_i – конкретные значения случайной величины вектора X (обычно x_1, x_2, x_i, x_n представляют собой центры интервалов, на которые разбивают диапазон наблюдаемых значений X);

w_i – конкретные значения неслучайной величины вектора W ;

y_i – вполне определенные значения вектора Y .

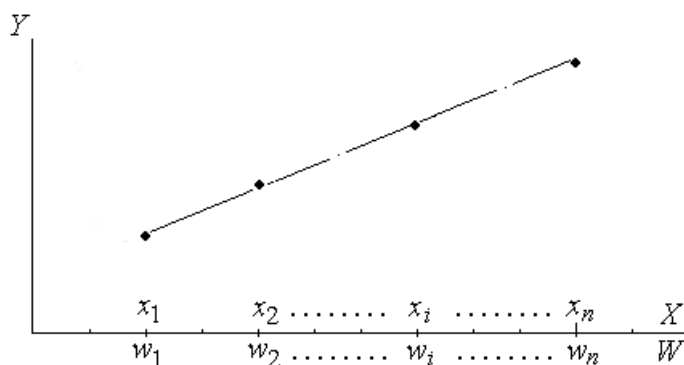


Рис. 2.5. Пример функциональной линейной зависимости (может быть криволинейная)

В условиях серийного и массового производства на параметры качества электронных средств оказывает влияние значительное число неконтролируемых или трудно учитываемых факторов. Для описания влияния этих факторов при построении математических моделей подобных процессов наиболее подходит использование вероятностной (стохастической) зависимости.

Вероятностная (или стохастическая) зависимость. Зависимость между двумя переменными называется стохастической (вероятностной), если одна из них Y , являясь случайной величиной, реагирует на изменение другой

величины – аргумента (как неслучайной – W , так и случайной – X) изменением своего закона распределения. Другими словами, в общем случае вероятностной зависимости, при изменении значения одной величины (аргумента) изменяется условный закон распределения другой величины (функции). Для вероятностной зависимости влияние факторов Z существенно и пренебрегать им нельзя. Это определение вновь проиллюстрируем таблицей и графиком (рис. 2.6).

Вход	Выход
x_1 или w_1	$\varphi_1\{y\}$
x_2 или w_2	$\varphi_2\{y\}$
...	...
x_i или w_i	$\varphi_i\{y\}$
...	...
x_n или w_n	$\varphi_n\{y\}$

где $\varphi_i\{y\}$ – условный закон (плотность вероятности) распределения случайной величины Y при значениях x_i (или w_i).

Для значений x_i (или w_i), воспроизводимых несколько раз (значения w_i мы устанавливаем сами целенаправленно, а x_i представляют собой значе-

ния, попавшие в соответствующий диапазон со средним значением, равным x_i), мы получаем множество значений величины Y (что позволяет рассматривать ее как случайную величину).

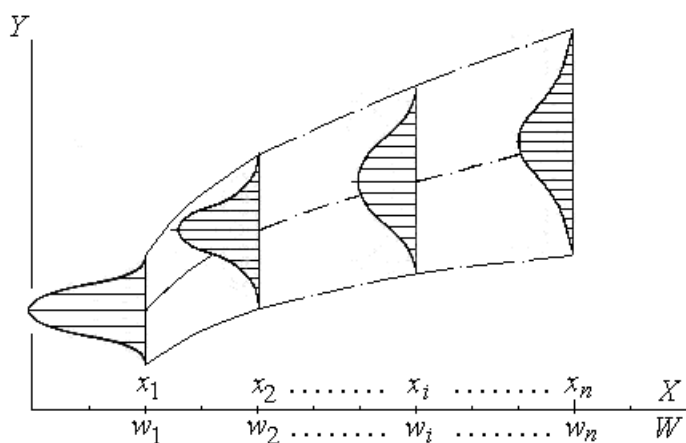


Рис. 2.6. Пример вероятностной (стохастической) зависимости

Таким образом, наблюдаемое множество значений Y для i -й точки может рассматриваться как условное распределение величины Y с плотностью вероятности $\varphi_i\{y\}$. В общем случае вероятностной зависимости при переходе от одних значений x_i (или w_i) к x_{i+1} (или w_{i+1}) мы получаем новый закон распределения $\varphi_{i+1}\{y\}$, при этом может изменяться как сам закон распреде-

ления (аналитически и графически), так и его числовые характеристики: математическое ожидание $m_{i+1}\{y\}$ и дисперсия $\sigma^2_{i+1}\{y\}$.

Некоторые частные случаи вероятностной зависимости

1. Регрессионная зависимость. Регрессионной называется зависимость между неслучайной величиной W (аргументом) и случайной величиной Y (функцией), при которой при изменении аргумента изменяется только математическое ожидание функции, а условное распределение величины Y (т.е. при любых значениях W) нормальное с постоянной дисперсией. Как и ранее представим регрессионную зависимость в виде таблицы (табл. 2.1) и графически (рис. 2.7).

Таблица 2.1

Вход	Выход			
w_1	$\varphi_1\{y\}$	Закон Гаусса	$m_1\{y\}$	$\sigma^2\{y\} \approx \text{const}$
w_2	$\varphi_2\{y\}$		$m_2\{y\}$	
...	
w_i	$\varphi_i\{y\}$		$m_i\{y\}$	
...	
w_n	$\varphi_n\{y\}$		$m_n\{y\}$	

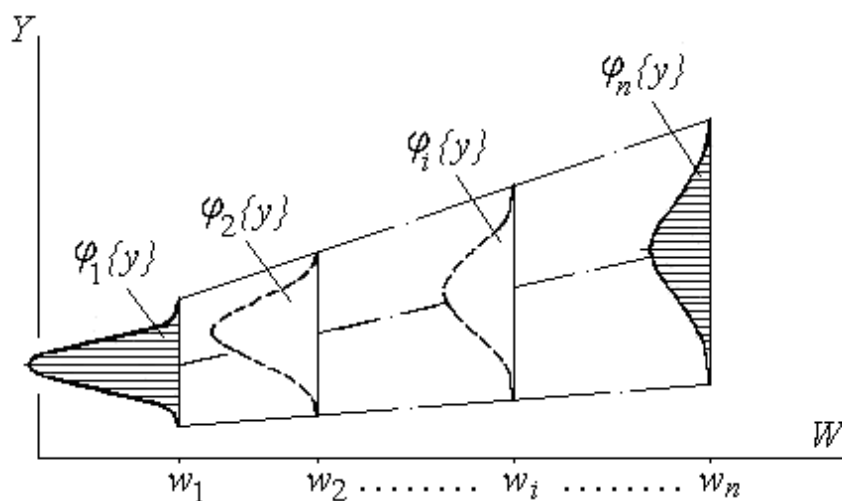


Рис. 2.7. Пример регрессионной линейной зависимости (может быть криволинейная)

Эксперимент, при котором значения Y определяют при целенаправленном изменении W , называют активным, т.е. значения W устанавливаются по усмотрению экспериментатора.

2. *Корреляционная зависимость.* Корреляционной называется зависимость между двумя случайными величинами, при которой вследствие изменения одной величины (аргумента X) изменяется только математическое ожидание другой (функции Y). В отличие от регрессионной зависимости здесь аргумент – случайная величина. Таблица и график, характеризующие корреляционную зависимость, имеют следующий вид (табл. 2.2 и рис. 2.8).

Таблица 2.2

Вход	Выход			
x_1	$\varphi_1\{y\}$	Закон Гаусса	$m_1\{y\}$	$\sigma^2\{y\} \approx \text{const}$
x_2	$\varphi_2\{y\}$		$m_2\{y\}$	
\dots	\dots		\dots	
x_i	$\varphi_i\{y\}$		$m_i\{y\}$	
\dots	\dots		\dots	
x_n	$\varphi_n\{y\}$		$m_n\{y\}$	

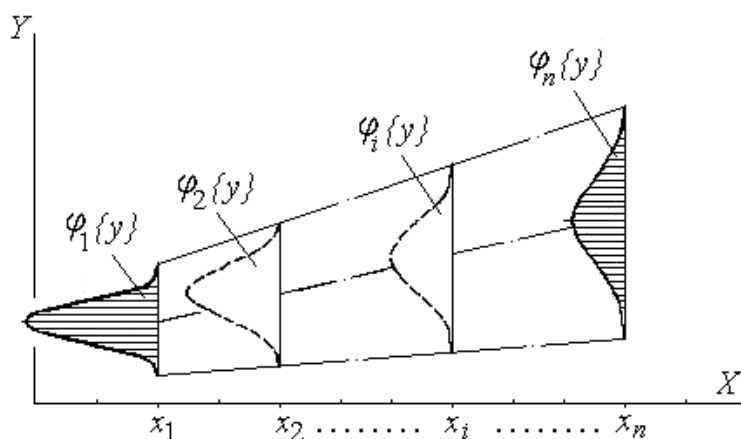


Рис. 2.8. Пример корреляционной линейной зависимости (может быть криволинейная)

3. *Скедастическая зависимость.* Скедастической называется зависимость между двумя переменными, если одна из них Y , являясь случайной величиной, реагирует на изменение другой величины – аргумента (как неслучайной W , так и случайной X) только изменением своей дисперсии.

Эту зависимость также изобразим в виде таблицы (табл. 2.3).

Таблица 2.3

Вход	Выход			
x_1 или w_1	$\varphi_1\{y\}$	Закон Гаусса	$m\{y\} \approx \text{const}$	$\sigma_1^2\{y\}$
x_2 или w_2	$\varphi_2\{y\}$			$\sigma_2^2\{y\}$
.....
x_i или w_i	$\varphi_i\{y\}$			$\sigma_i^2\{y\}$
.....
x_n или w_n	$\varphi_n\{y\}$			$\sigma_n^2\{y\}$

и графика (рис. 2.9).

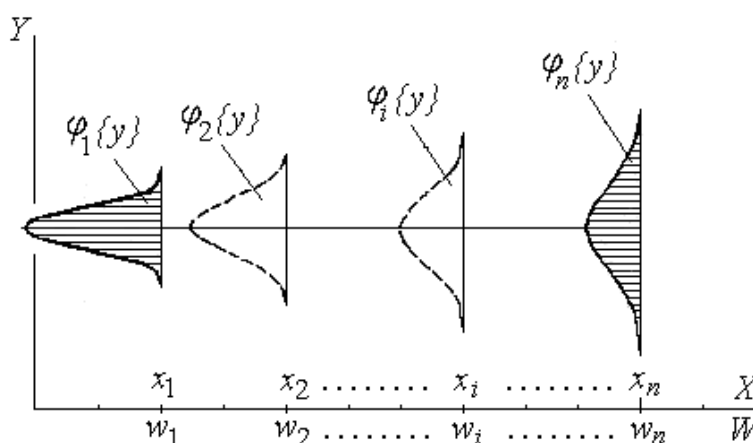


Рис. 2.9. Пример скадастической зависимости

2.2.3. Построение математической модели точности ТП

Математическую модель будем получать в виде аналитических выражений, устанавливающих взаимосвязи между законами распределения, числовыми характеристиками и практическими полями рассеивания погрешностей входных и выходных параметров.

Выделим две группы моделей:

- 1) модели, построенные на основе известной функциональной зависимости между входными и выходными переменными;
- 2) модели, построенные исходя из предположения наличия вероятностной (стохастической) зависимости между входными и выходными параметрами.

Первая группа моделей

В основе построения моделей этой группы могут быть известные зависимости, типа (2.1), либо полиномиальные зависимости вида

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i \neq j}^k b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2 + \dots ,$$

где b_0, b_i, b_{ij}, b_{ii} – постоянные величины, представляющие собой коэффициенты ряда Тейлора, т.е. значения частных производных в точке, вокруг которой осуществляется разложение неизвестной функции:

$$b_i = \partial y / \partial x_i, \quad b_{ij} = \partial^2 y / \partial x_i \partial x_j, \quad b_{ii} = \partial^2 y / \partial x_i^2.$$

Методы получения полиномиальных функциональных зависимостей достаточно полно разработаны. Неизвестные коэффициенты определяются при обработке данных активного (реже пассивного) полного или дробного факторного эксперимента.

Итак, независимо от способа получения в качестве исходной формулы имеем функциональную зависимость

$$Y = f\{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N\}, \quad X_i \in G_i, \quad i = \overline{1, N},$$

где Y – выходной параметр;

X_i – входные параметры;

G_i – области их определения.

Кроме того, должны быть известны характеристики распределения входных параметров.

Начнем с более простого случая.

Дано:

1) $Y = f\{X\}$, где X и Y – случайные величины;

2) $\varphi_x\{x\}$ – плотность вероятности распределения случайной величины X .

Требуется определить $\varphi_y\{y\}$ – плотность вероятности распределения случайной величины Y . Из формулы для $\varphi_y\{y\}$ могут быть найдены выражения для математического ожидания $m\{Y\}$, дисперсии $\sigma^2\{Y\}$ и практического

поля рассеивания Δ_y . Последняя характеристика представляет собой область значений Y , выход за пределы которой маловероятен (например, для закона Гаусса за Δ_y обычно принимается $\pm 3\sigma$; в эту область попадает 99,73 % всех значений случайной величины Y).

Решение:

$$\varphi_y\{y\} = \left| \frac{d[u(Y)]}{dY} \right| \varphi[u(Y)], \quad (2.3)$$

где $u(Y)$ – функция, обратная $f\{X\}$.

П р и м е ч а н и е . Формула (2.3) применима, если функция $Y = f\{X\}$ однозначно определена, непрерывна, монотонна и имеет отличную от нуля производную на всем участке определения X .

Пример 1. Дано: $Y = cX$, где $c = \text{const}$;

$$\varphi_x\{x\} = \frac{1}{\sigma\{X\}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2\{X\}}\right). \quad \varphi_y\{y\} = ?$$

Решение:

$$u(Y) = x = \frac{y}{c}; \quad \frac{d[u(Y)]}{dY} = \frac{1}{c}; \quad m\{Y\} = M\{cX\} = cm\{X\}; \quad \sigma^2\{Y\} = \sigma^2\{cX\} = c^2\sigma^2\{X\}.$$

Выражая

$\sigma\{Y\} = c\sigma\{X\}$ и заменяя $\sigma\{X\}$ на $\sigma\{Y\}/c$ и x на y/c , получим

$$\varphi_y\{y\} = \frac{1}{\sigma\{Y\}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2\{Y\}}\right).$$

Таким образом, распределение Y также нормальное, но с другой дисперсией.

Рассмотрим случай, когда выходной параметр Y является функцией суммы двух независимых непрерывных одномерных случайных величин $Y = X_1 + X_2$ с плотностями вероятности $\varphi_1\{x_1\}$ и $\varphi_2\{x_2\}$. Тогда закон распределения случайной величины Y будет представлять собой композицию двух законов распределения $\varphi_1\{x_1\}$ и $\varphi_2\{x_2\}$

$$\varphi_y\{y\} = \varphi_y\{x_1 + x_2\} = \varphi_1\{x_1\} * \varphi_2\{x_2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1\{x_1\} \varphi_2\{y - x_1\} dx_1. \quad (2.4)$$

Пример 2. Дано: $Y = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 – независимые случайные величины, распределенные по закону равной вероятности

$$\varphi_1\{x_1\} = \frac{1}{2l}; \quad \varphi_2\{x_2\} = \frac{1}{2l}; \quad m\{X_1\} = m\{X_2\} = 0; \quad \varphi_y\{y\} = ?$$

Решение. Области определения: $-l \leq x_{1,2} \leq +l$; $-2l \leq y \leq +2l$. Вне этих пределов функции $\varphi_1\{x_1\}$, $\varphi_2\{x_2\}$ и $\varphi_y\{y\}$ равны нулю. Подставляя данные в формулу (2.4), получим:

а) для диапазона $-2l \leq y \leq 0$

$$\varphi_y\{y\} = \int_{-l}^{y+l} \frac{1}{2l} \cdot \frac{1}{2l} dx_1 = \frac{2l+y}{4l^2};$$

б) для диапазона $0 \leq y \leq 2l$

$$\varphi_y\{y\} = \int_{y-l}^{+l} \frac{1}{2l} \cdot \frac{1}{2l} dx_1 = \frac{2l-y}{4l^2}.$$

Полученный закон распределения называется распределением Симпсона и имеет вид равнобедренного треугольника (рис. 2.10).

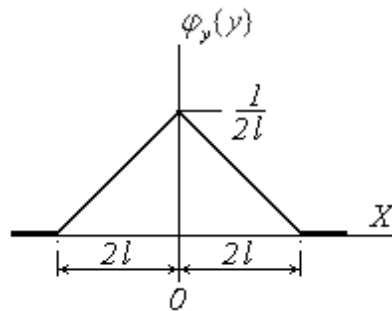


Рис. 2.10. Распределение Симпсона

Известно, что если число независимых между собой случайных слагаемых, распределенных по закону равной вероятности с пределами $-1 \leq x_i \leq +1$, будет стремиться к бесконечности, то распределение функции Y будет приближаться к нормальному с пределами $-\infty \leq y \leq +\infty$. Это еще раз подтверждает, что формула Гаусса – всего лишь математическая абстракция (как и все математические модели), а не закон, которому подчиняются события объективного мира.

На рис. 2.11 показано, как изменяется распределение функции $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ с увеличением числа слагаемых в виде дискретных случайных величин X_i , распределенных по закону равной вероятности.

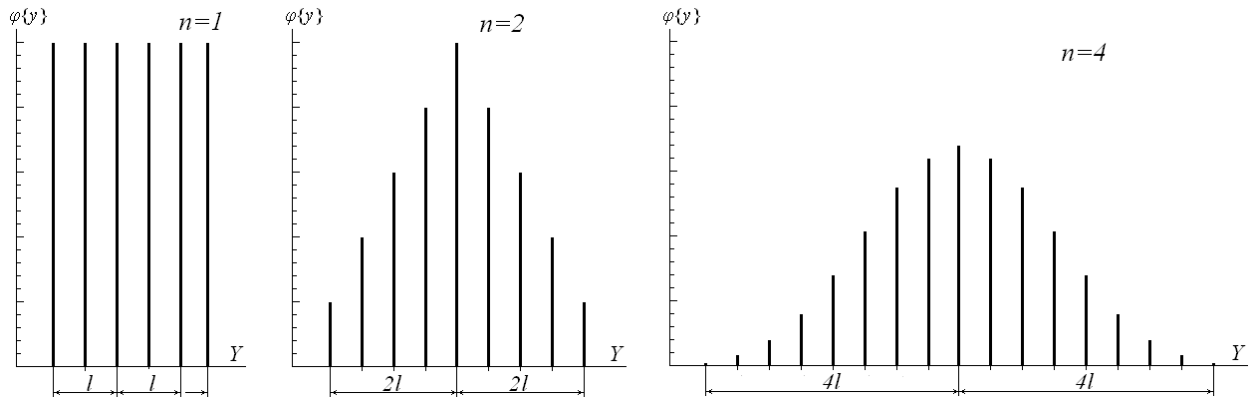


Рис. 2.11. Закон распределения суммы дискретных случайных величин

Таким образом, закон Гаусса в качестве математической модели больше всего подходит для описания случайных величин, представляющих собой суммы бесконечно большого числа слагаемых, среди которых не должно быть доминирующих.

Пример 3. Дано: $Y = X_1 + X_2$, где X_1 и X_2 – независимые случайные величины, распределенные по закону Гаусса

$$\varphi_{1,2}\{x_{1,2}\} = \frac{1}{\sigma\{X_{1,2}\}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x_{1,2} - m\{X_{1,2}\})^2}{2\sigma^2\{X_{1,2}\}}\right]; \quad \varphi_y\{y\} = ?$$

Решение. Подставляя данные в формулу (2.4), получим

$$\varphi_y\{y\} = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma\{X_1\} \cdot \sigma\{X_2\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x_1 - m\{X_1\})^2}{2\sigma^2\{X_1\}} - \frac{(x_2 - m\{X_2\})^2}{2\sigma^2\{X_2\}}\right] dx_1. \quad (2.5)$$

Выражение (2.5) преобразуем к виду

$$\varphi_y\{y\} = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma\{X_1\} \cdot \sigma\{X_2\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-Ax_1^2 + 2Bx_1 - C] dx_1,$$

$$\text{где } A = \frac{\sigma^2\{X_1\} + \sigma^2\{X_2\}}{2\sigma^2\{X_1\} \cdot \sigma^2\{X_2\}}; \quad B = \frac{m\{X_1\}}{2\sigma^2\{X_1\}} + \frac{y - m\{X_2\}}{2\sigma^2\{X_2\}}; \quad C = \frac{m^2\{X_1\}}{2\sigma^2\{X_1\}} + \frac{(y - m\{X_2\})^2}{2\sigma^2\{X_2\}}.$$

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-Ax_1^2 + 2Bx_1 - C] dx_1 = \sqrt{\frac{\pi}{A}} \cdot \exp\left[-\frac{AC - B^2}{A}\right].$$

В итоге

$$\varphi_y\{y\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2\{X_1\} + \sigma^2\{X_2\}}} \exp\left\{-\frac{[y - (m\{X_1\} + m\{X_2\})]^2}{2(\sigma^2\{X_1\} + \sigma^2\{X_2\})}\right\}.$$

Полученная формула есть не что иное, как закон Гаусса с математическим ожиданием $m\{Y\} = m\{X_1\} + m\{X_2\}$ и средним квадратическим отклонением

$$\sigma\{Y\} = \sqrt{\sigma^2\{X_1\} + \sigma^2\{X_2\}}.$$

Из рассмотренного примера следует вывод: если случайная величина Y представляет собой линейную функцию от случайных независимых между собой параметров X_i , распределенных по нормальному закону, то распределение Y будет также нормальным с числовыми характеристиками $m\{Y\} = \sum_{i=1}^n m\{X_i\}$ и $\sigma^2\{Y\} = \sum_{i=1}^n \sigma^2\{X_i\}$; говорят, что закон Гаусса является устойчивым законом (т.е. воспроизводящим себя при компонировании).

В задачах анализа точности технологических процессов часто встречается зависимость вида $U = \sqrt{X^2 + Y^2}$, где X и Y – независимые случайные величины, распределенные обычно по нормальному закону. Такую модель применяют для описания различного рода радиальных отклонений, например смещений центров отверстий относительно своих номинальных положений; в этом случае величины X и Y представляют собой погрешности смещений центров отверстий вдоль соответствующих осей координат. Плотность распределения величины U , называемого законом Максвелла, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi\{u\} = & \frac{u}{2\pi\sqrt{(1-r_{XY}^2)}\sigma_X\sigma_Y} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r_{XY}^2)}\left[\frac{(u\cos\theta - m\{X\})^2}{\sigma^2\{X\}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2r_{XY}(u\cos\theta - m\{X\})(u\sin\theta - m\{Y\})}{\sigma\{X\}\sigma\{Y\}} + \frac{(u\sin\theta - m\{Y\})^2}{\sigma^2\{Y\}}\right]\right\} d\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$(0 \leq u \leq +\infty),$$

где r_{XY} – коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y .

В частном случае, при условиях

$$r_{XY} = 0; \quad m\{X\} = m\{Y\} = 0; \quad \sigma^2\{X\} = \sigma^2\{Y\} = \sigma_0^2,$$

выражение (2.6) превращается в закон Релея с плотностью вероятности:

а) аналитически

$$\varphi\{u\} = \begin{cases} 0 & \text{при } u < 0, \\ \frac{u}{\sigma_0^2} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_0^2}\right) & \text{при } u \geq 0; \end{cases}$$

б) графически (рис. 2.12).

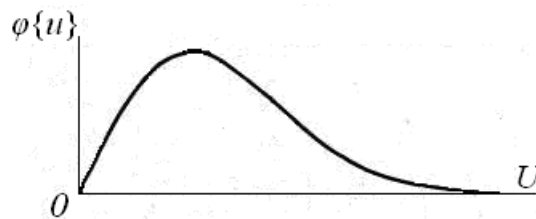


Рис. 2.12. Плотность распределения закона Релея

На практике, даже при весьма несложных зависимостях между входными и выходными параметрами, часто не удается получить закон распределения выходного параметра в аналитической форме. Тогда возможны два пути решения.

1. Не находя закона распределения выходного параметра, определяют только приближенные числовые характеристики его распределения путем разложения функции в ряд Тейлора с сохранением членов низших порядков.

2. Закон распределения выходного параметра получают статистическим моделированием на ЭВМ (метод Монте-Карло).

В первом случае для функции

$$Y = f\{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N\}, \quad X_i \in G_i, \quad i = \overline{1, N}$$

получаем расчетные формулы:

а) математического ожидания

$$m\{Y\} \approx f(m\{X_1\}, m\{X_2\}, \dots, m\{X_i\}, \dots, m\{X_N\});$$

б) дисперсии

$$\sigma^2\{Y\} \approx \sum_{i=1}^N \left(\frac{df}{dx_i} \right)_{cp}^2 \sigma^2\{X_i\},$$

где $\left(\frac{df}{dx_i} \right)_{cp}$ – частная производная функции Y по одному из аргументов X_i ;

индекс «ср» обозначает, что в выражение для частной производной после дифференцирования должны быть подставлены средние значения всех аргументов (обычно $m\{X_i\}$).

Если входные переменные связаны между собой корреляционной зависимостью, то в формуле для дисперсии появятся дополнительные члены.

В случае линейного вида функции $Y = f\{X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_N\}$ приближенные выражения для математического ожидания и дисперсии становятся точными.

Пример 4. Дано: $Y = X_1 + X_2 + X_3$, где X_1 , X_2 и X_3 – независимые случайные величины.

Решение. Определяем частные производные $\left(\frac{df}{dx_i} \right)_{cp} = 1$. Далее

$$m\{Y\} = m\{X_1\} + m\{X_2\} + m\{X_3\}, \quad \sigma^2\{Y\} = \sigma^2\{X_1\} + \sigma^2\{X_2\} + \sigma^2\{X_3\}.$$

Пример 5. Получим формулы для приближенного определения числовых характеристик сопротивления тонкопленочного резистора (2.1)

$$R = \frac{\rho l}{b h}.$$

Решение:

$$m\{R\} \approx m\{\rho\} \frac{m\{l\}}{m\{b\} \cdot m\{h\}}; \quad \frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{l}{b h}; \quad \frac{\partial R}{\partial l} = \frac{\rho}{b h}; \quad \frac{\partial R}{\partial b} = -\rho \frac{l}{b^2 h}; \quad \frac{\partial R}{\partial h} = -\rho \frac{l}{b h^2};$$

$$\sigma^2\{R\} \approx \left[\frac{m\{l\}}{m\{b\} \cdot m\{h\}} \right]^2 \sigma^2\{\rho\} + \left[\frac{m\{\rho\}}{m\{b\} \cdot m\{h\}} \right]^2 \sigma^2\{l\} + \left[\frac{m\{\rho\} \cdot m\{l\}}{m^2\{b\} \cdot m\{h\}} \right]^2 \sigma^2\{b\} + \left[\frac{m\{\rho\} \cdot m\{l\}}{m\{b\} \cdot m^2\{h\}} \right]^2 \sigma^2\{h\}.$$

Используя полученные выражения, рассчитаем $m\{R\}$ и $\sigma^2\{R\}$ при следующих исходных данных:

$$m\{\rho\} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Ом} \cdot \text{м}; \quad m\{l\} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad m\{b\} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}; \quad m\{h\} = 10^{-7} \text{ м};$$

распределение параметров ρ , l , b и h в пределах $\pm 3\%$ относительно их средних значений (математических ожиданий) принять по закону равной вероятности. Получаем

$$m\{R\} \approx 5 \cdot 10^{-5} \frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-7}} = 5000 \text{ Ом}; \quad \sigma^2\{R\} \approx \left(\frac{5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-7}} \right)^2 \frac{(5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,03)^2}{3} +$$

$$+ \left(\frac{5 \cdot 10^{-5}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-7}} \right)^2 \frac{(5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,03)^2}{3} + \left(\frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{25 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-7}} \right)^2 \frac{(5 \cdot 10^{-4} \cdot 0,03)^2}{3} +$$

$$+ \left(\frac{5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-14}} \right)^2 \frac{(10^{-7} \cdot 0,03)^2}{3} = 25000 \text{ Ом}^2; \quad \sigma\{R\} \approx 158,1 \text{ Ом}.$$

Если предположить распределение R близким к нормальному, то диапазон $\pm 3\sigma \approx 3 \cdot 158,1 = 474,3 \approx 500 \text{ Ом}$.

Таким образом, ожидаемый диапазон сопротивлений резисторов $(5000 \pm 10\%) \text{ Ом}$.

Решим ту же задачу методом статистического моделирования на ЭВМ (метод Монте-Карло). В этом методе в качестве исходного распределения используется специальная программа «Датчик случайных чисел», которая формирует последовательность случайных чисел, распределенных по закону равной вероятности в диапазоне $0 \dots 1$ (случайная величина ξ). Дальнейшее моделирование случайных величин может осуществляться по алгоритмам, приведенным в табл. 2.4[10].

Таким образом, на первом шаге получаем значения ρ_1 , l_1 , b_1 и h_1 в соответствии с их законами распределения. Подставляем эти значения в формулу (2.1) и рассчитываем величину R_1 . Повторяя эти действия (которые обычно называют итерациями) многократно, получим совокупность значений R_i ($i = \overline{1, N}$), на основании которых строится гистограмма и определяются числовые характеристики.

Таблица 2.4

Тип распределения	Параметры распределения	Метод получения случайного числа x	Алгоритм вычисления случайного числа η
Равномерное распределение на интервале $(a \dots b)$	a b	Функциональное преобразование случайной величины ξ	$a + (b - a)\xi$
Экспоненциальное распределение	λ	Функциональное преобразование случайной величины ξ	$-\frac{1}{\lambda} \ln \xi$
Распределение Вейбулла	λ k	Функциональное преобразование случайной величины ξ	$\sqrt[k]{-\frac{1}{\lambda} \ln \xi}$
Нормальный закон распределения	M σ	Метод суммирования	$M + \sigma(\sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6)$
χ^2 -распределение	n – число степеней свободы	Метод суммирования	$\sum_{j=1}^n \gamma_j^2$, где $\gamma_i = \sum_{i=1}^{12} \xi_i - 6$

Результат моделирования нашего примера, выполненного специальной программой, показан на рис. 2.13.

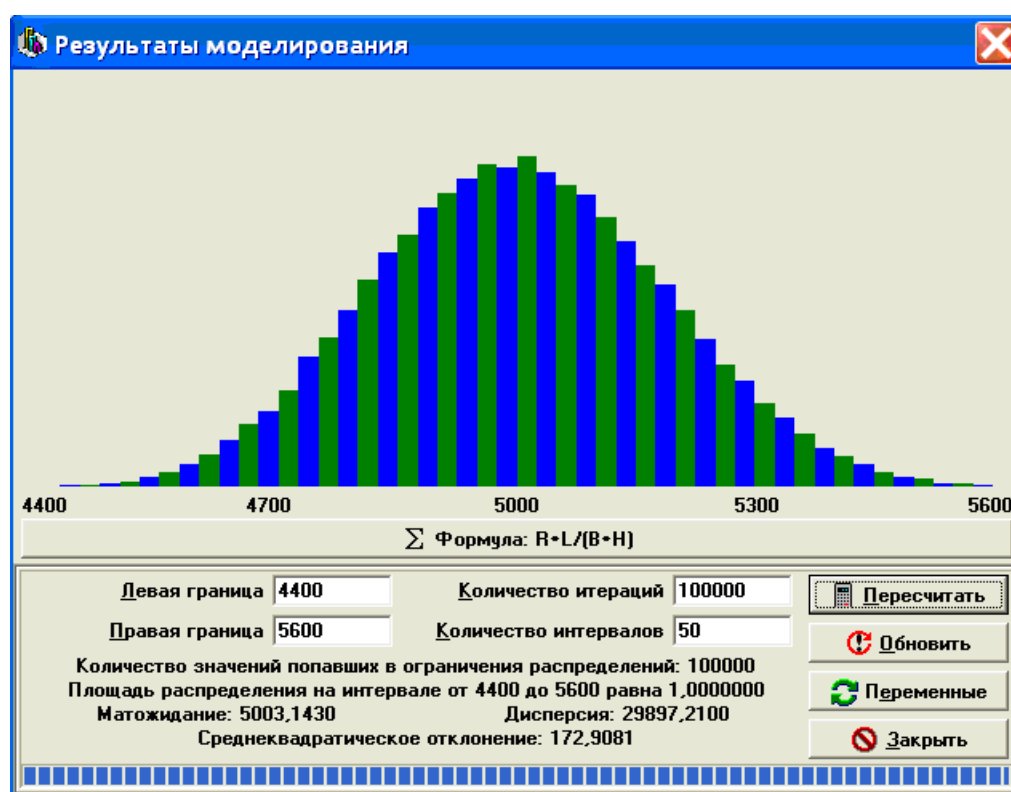


Рис. 2.13. Окно программы с результатами статистического моделирования

Вторая группа моделей

Ниже рассматриваются математические модели, построенные исходя из предположения наличия вероятностной (стохастической) зависимости между входными и выходными параметрами. Из всего многообразия таких моделей ограничимся двумя частными случаями – математическими моделями с регрессионной и корреляционной зависимостями между входными и выходными параметрами. В этих случаях модели представляют собой аналитические выражения, устанавливающие связи между числовыми характеристиками (математическими ожиданиями и дисперсиями) с помощью коэффициентов, определяемых эмпирически методами регрессионного и корреляционного анализа.

Основная задача регрессионного анализа заключается в установлении зависимости $\tilde{Y} = f\{W\}$, где W – неслучайная входная переменная, которую мы можем изменять по своему усмотрению. Дальнейший порядок следующий:

1. Проводится эксперимент, в котором для каждого значения w_i ($i = \overline{1, m}$) получаем n независимых значений выходного параметра Y . Результаты эксперимента заносим в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Вход	Выход	Повторы	\bar{y}_i	$\sigma_i^2\{y\}$
w_1	y_{11}, \dots, y_{1n}	n	\bar{y}_1	$\sigma_1^2\{y\}$
w_2	y_{21}, \dots, y_{2n}	n	\bar{y}_2	$\sigma_2^2\{y\}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
w_m	y_{m1}, \dots, y_{mn}	n	\bar{y}_m	$\sigma_m^2\{y\}$

2. Построчно вычисляем арифметические средние \bar{y}_i и дисперсии $\sigma_i^2\{y\}$.

3. Проверяются гипотезы.

Согласно правилам теории вероятностей и математической статистики для регрессионной зависимости выходные данные каждой строки (y_{i1}, \dots, y_{in})

представляют собой выборку из генеральной совокупности с бесконечно большим числом данных, распределенных по нормальному закону. Всего у нас m выборок из m подобных совокупностей, каждая из которых имеет одинаковую дисперсию, но разные математические ожидания. Чтобы считать исследуемую зависимость регрессионной, необходимо доказать следующее:

а) выходные данные каждой строки принадлежат генеральной совокупности с нормальным распределением;

б) дисперсии $\sigma_i^2\{y\}$ однородны (т.е. некоторые различия в их значениях объясняются только малым размером выборок).

Доказательства (проверки гипотез) осуществляются путем вычисления соответствующих статистических критериев (Стьюдента, Колмогорова, Кокрена, Пирсона и др.) с последующим сравнением с их табулированными значениями. В зависимости от задаваемого уровня вероятности ошибки гипотеза принимается или отклоняется. Поскольку математическая модель представляет приближенное описание того или иного процесса, то для решения практических задач проверка подобных гипотез мало что значит.

Например, если экспериментальные данные y_{i1}, \dots, y_{in} графически будут представлять гистограмму закона равной вероятности, то все равно при некотором уровне вероятности ошибки можно считать, что они взяты из генеральной совокупности с нормальным распределением.

4. Наносим на график (рис. 2.14) совокупность точек $\bar{y}_i (i = \overline{1, m})$, для которых исходя из теоретико-профессиональных соображений подбираем функцию $\tilde{Y} = f\{W\}$. В качестве последней часто принимают полином вида $\tilde{Y} = b_0 + b_1W + b_2W^2 + \dots$ (где b_0, b_1, b_2, \dots – постоянные коэффициенты).

5. Оцениваем степень соответствия выбранной функции и опытных данных. Рассчитываем величину

$$v^2 = \frac{(N - m) \sum_{i=1}^m n [\bar{y}_i - \tilde{y}\{w_i\}]^2}{(m - 2) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n [y_{ij} - \bar{y}_i]^2}, \quad (2.7)$$

где \bar{y}_i – средние арифметические выходы в точке w_i ;

$\tilde{y}\{w_i\}$ – значение функции в точке w_i ;

y_{ij} – экспериментальные значения ($i = \overline{1, m}$), ($j = \overline{1, n}$);

N – общее число точек наблюдений ($N=mn$).

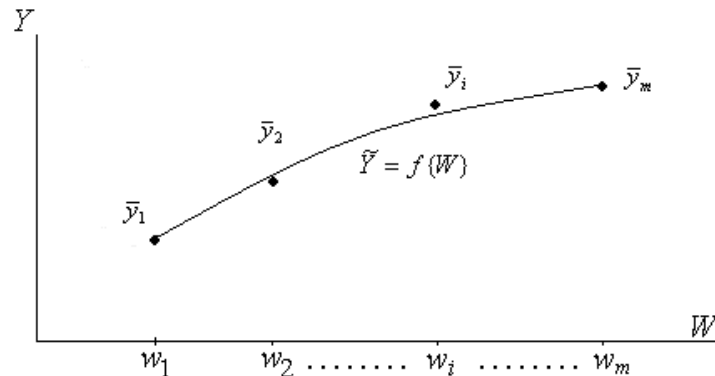


Рис. 2.14. Построение линии регрессии

Числитель выражения (2.7) характеризует разброс экспериментальных групповых средних \bar{y}_i относительно выбранной линии регрессии (подобно методу наименьших квадратов).

Для проверки гипотезы статистическими методами необходимо задать-ся малым уровнем значимости α (где α – вероятность принятия неправильно-го решения). Далее по таблицам математической статистики для F -критерия Фишера со значениями $(m-2, N-m)$ находят 100α -процентную точку v_α^2 . Если $v^2 < v_\alpha^2$, то гипотеза о линии регрессии не противоречит экспериментальным данным.

Если влиянием факторов \mathbf{Z} можно пренебречь (например, если считать их только погрешностями измерений), то уравнение регрессии $\tilde{Y} = f\{W\}$ пе-реходит в функциональную зависимость $Y = f\{W\}$.

Последовательность построения уравнения регрессии для случая не-скольких входных параметров приведена в главе 4.

Основная задача корреляционного анализа заключается в исследовании наличия, формы и силы связи между двумя или несколькими случайными ве-личинами, причем не обязательно, что одна из них должна быть функцией. Корреляционная связь может существовать и между входами «черного ящи-

ка». Последовательность корреляционного анализа (на примере случайных величин X и Y).

1. Данные пассивного эксперимента

x_1, x_2, \dots, x_N – для входной переменной;

y_1, y_2, \dots, y_N – для выходной переменной

вносим в корреляционную таблицу (табл. 2.6).

Таблица 2.6

$x \backslash y$	$y_{\min} \dots y_{\min+1}$	\dots	$y_{\max-1} \dots y_{\max}$	Σ	\bar{y}_i	$\sigma_i^2\{y\}$
$x_{\min} \dots x_{\min+1}$	n_{11}	\dots	n_{1l}	$\sum_{j=1}^l n_{1j}$	\bar{y}_1	$\sigma_1^2\{y\}$
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
$x_{\max} \dots x_{\max-1}$	n_{kl}	\dots	n_{kl}	$\sum_{j=1}^l n_{kj}$	\bar{y}_k	$\sigma_k^2\{y\}$
Σ	$\sum_{i=1}^k n_{i1}$	\dots	$\sum_{i=1}^k n_{il}$	N	\bar{y}	σ_y^2
\bar{x}_j	\bar{x}_1	\dots	\bar{x}_l	\bar{x}	\bar{y}	σ_y^2
$\sigma_j^2\{x\}$	$\sigma_1^2\{x\}$	\dots	$\sigma_l^2\{x\}$	σ_x^2	\bar{y}	σ_y^2

П р и м е ч а н и я: 1. Число интервалов определяют по формуле Стерджесса с округлением до ближайшего целого числа

$$k \approx \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3,32 \lg N}; \quad l \approx \frac{y_{\max} - y_{\min}}{1 + 3,32 \lg N}.$$

2. n_{ij} ($i = \overline{1, k}, \quad j = \overline{1, l}$) – число значений, попавших в соответствующий интервал.

Далее для строк и столбцов рассчитываем средние арифметические (\bar{x}_j и \bar{y}_i) и дисперсии ($\sigma_j^2\{x\}$ и $\sigma_i^2\{y\}$) по формулам

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^k n_{ij} \cdot x_i}{\sum_{i=1}^k n_{ij}}, \quad \bar{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^l n_{ij} \cdot y_j}{\sum_{j=1}^l n_{ij}}, \quad \sigma_j^2\{x\} = \frac{\sum_{i=1}^k n_{ij} \cdot (x_i - \bar{x}_j)^2}{\sum_{i=1}^k n_{ij}}, \quad \sigma_i^2\{y\} = \frac{\sum_{j=1}^l n_{ij} \cdot (y_j - \bar{y}_i)^2}{\sum_{j=1}^l n_{ij}},$$

где x_i и y_j – середины интервалов случайных величин X и Y соответственно.

2. На основании данных табл. 2.6 вычисляем:

а) коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l n_{ij} (x_i - \bar{X}) (y_j - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{j=1}^l n_j (y_j - \bar{Y})^2}},$$

где $n_i = \sum_{j=1}^l n_{ij}, \quad n_j = \sum_{i=1}^k n_{ij}, \quad \bar{X} = \sum_{j=1}^l \frac{n_j \cdot \bar{x}_j}{N}, \quad \bar{Y} = \sum_{i=1}^k \frac{n_i \cdot \bar{y}_i}{N};$

б) корреляционное отношение

$$\eta_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k n_i (\bar{y}_i - \bar{Y})^2}{\sum_{j=1}^l n_j (y_j - \bar{Y})^2}}.$$

3. По величине коэффициента корреляции и корреляционного отношения судят о форме и о силе связи (табл. 2.7).

Таблица 2.7

r_{xy}	η_y	Характеристика связи
$r_{xy} = \pm 1$	—	Линейная функциональная
$r_{xy} = 0$	$\eta_y = 1$	Криволинейная функциональная
$r_{xy} = 0$	$\eta_y = 1$	Связь отсутствует
$r_{xy} = 0$	$\eta_y < 1$	Криволинейная корреляционная
$ r_{xy} = \eta_y$	—	Точная линейная корреляционная
$ r_{xy} > 0$	$\eta_y < 1$	Линейная корреляционная

Последний случай на практике встречается чаще всего.

4. Рассчитываем коэффициенты для проверки гипотез:

а) о нормальном законе распределения данных по строкам и по столбцам;

б) об однородности дисперсий по строкам и по столбцам;

в) о статистической значимости коэффициента корреляции.

Первые две гипотезы проверяются так же, как и в регрессионном анализе. Что касается коэффициента корреляции, то обычно проверяется обрат-

ная гипотеза – гипотеза об отсутствии корреляционной связи. Если неравенство

$$\frac{r_{xy} \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}} < t_{0,05(N-2)},$$

где $t_{0,05(n-2)}$ – пятипроцентная точка распределения Стьюдента с $N-2$ степенями свободы, выполняется, то гипотеза об отсутствии корреляционной связи принимается. В противном случае с вероятностью 0,95 можно утверждать, что корреляционная связь действительно имеет место.

5. Как и в случае регрессионного анализа наносим на график точки \bar{y}_i (рис. 2.15) и соединяем их линией (обычно прямой $\tilde{Y} = f\{X\}$).

При линейной корреляционной зависимости уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{Y} = a + bX.$$

Коэффициенты a и b определяются из выражений

$$b = r_{xy} \cdot \frac{\sigma\{X\}}{\sigma\{Y\}}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}.$$

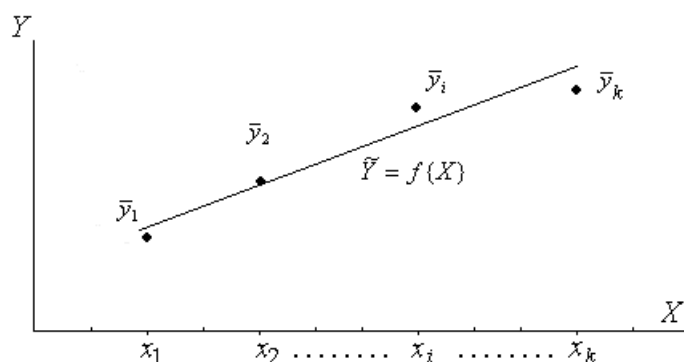


Рис. 2.15. Построение линии регрессии

2.2.4. Проверка адекватности математической модели

Для оценки адекватности математических моделей и реальных технологических процессов используют:

- а) визуальное сопоставление соответствующих теоретических и экспериментальных распределений, точностных диаграмм и т.п.;
- б) анализ рассчитываемых показателей расхождения теоретических и экспериментальных распределений; чаще всего в качестве таких показателей

используют сумму квадратов различий в средних значениях (в регрессионном и корреляционном анализе) или в количествах значений, соответствующих каждому интервалу (например, при проверке гипотез по χ^2 -критерию Пирсона).

В последнем случае рассчитывается величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(v_{\varepsilon i} - v_{mi})^2}{v_{mi}},$$

где $v_{\varepsilon i}$ – число значений экспериментального распределения, попавших в i -й интервал;

v_{mi} – число значений теоретического распределения, попавших в i -й интервал, причем

$$\sum_{i=1}^k v_{\varepsilon i} = \sum_{i=1}^k v_{mi},$$

где k – количество интервалов (при $v_{\varepsilon i}$ или v_{mi} меньше 5 соседние интервалы объединяют).

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ Н.А. БОРОДАЧЕВА

Рассмотренные выше математические модели строились на основе классических методов теории вероятностей и математической статистики. Они пригодны для описания в основном стабильных технологических процессов (см. рис. 1.2). У нестабильного технологического процесса со временем изменяется распределение выходного параметра (вид распределения, числовые характеристики). Исследователей в подобных случаях интересует суммарное распределение выходного параметра за определенный период времени. Это необходимо для принятия своевременных мер по корректировке (подналадке) технологического процесса, для того чтобы значения выходного параметра не вышли за пределы поля допуска. Рассмотренные ранее математические модели для решения подобных задач не годятся.

В теории точности существует раздел, в котором рассматривается класс распределений со следующими свойствами [13]:

- а) мгновенное распределение – всегда нормальное;
 б) математическое ожидание и дисперсия этих распределений является функцией времени, т.е.

$$\varphi_t\{y\} = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - C_t)^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

Впервые этот класс распределений был исследован профессором Бородачевым Н.А. Для описания процессов возникновения случайных погрешностей им был предложен ряд схем.

Схема 1

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Погрешность Y рассматривается как функция воздействия n (где n – достаточно большое число) случайных факторов – причин, также имеющих какие-то распределения. При $n \rightarrow \infty$ распределение Y будет стремиться к гауссовому распределению. Поскольку число факторов и степень их влияния считаются относительно постоянными, то распределение Y может быть описано законом Гаусса с числовыми характеристиками m_0 и σ_0 . Таким образом, для стабильного технологического процесса мы получаем закон распределения, не зависящий от времени (t). Он же будет и суммарным распределением за период T :

$$\varphi_{\Sigma}\{y\} = \varphi_0\{y\} = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_0)^2}{2\sigma_0^2}\right].$$

Теоретическая точностная диаграмма такого процесса приведена на рис. 3.1.

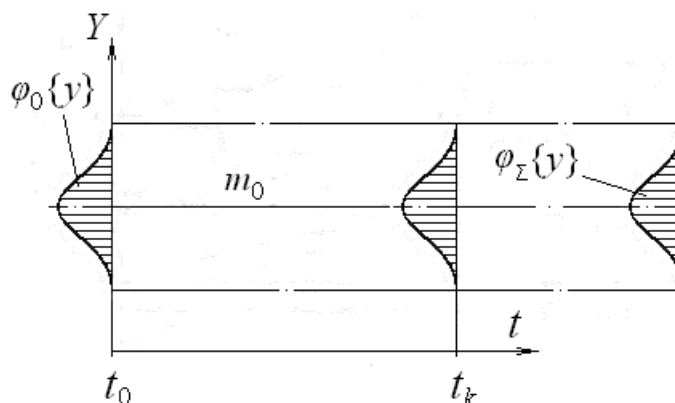


Рис. 3.1. Теоретическая точностная диаграмма с m_0 и σ_0

Если же технологический процесс таков, что на величину Y , помимо независимых или слабо зависимых факторов X_i , действует еще группа факторов $C_s^{(t)}$, которые не являются случайными, причем число или значения этих факторов систематически изменяются в зависимости от времени, то получим следующую схему 2.

Схема 2

$$Y_t = \sum_{i=1}^n X_i + C_t,$$

где C_t – значение суммы неслучайных слагаемых $C_s^{(t)}$, отвечающих моменту времени t . В этом случае мгновенное распределение будет гауссовым, но математическим ожиданием, зависящим от t . Следовательно,

$$\varphi_t\{y\} = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - C_t)^2}{2\sigma_0^2}\right],$$

где $C_t = m_0 + f\{t\}$.

В отличие от регрессионной и корреляционной зависимостей, рассмотренных ранее, в этом случае мы можем получить суммарный закон распределения за весь период $T = t_k - t_0$. Для этого применяется следующий искусственный прием (правда, не совсем справедливый с позиций классической теории вероятностей): параметр t рассматривается как случайная величина, равномерно распределенная в интервале от t_k до t_0 :

$$\varphi_{\Sigma}\{y\} = \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - C_t)^2}{2\sigma_0^2}\right] dt.$$

Теоретическая точностная диаграмма такого процесса приведена на рис. 3.2.

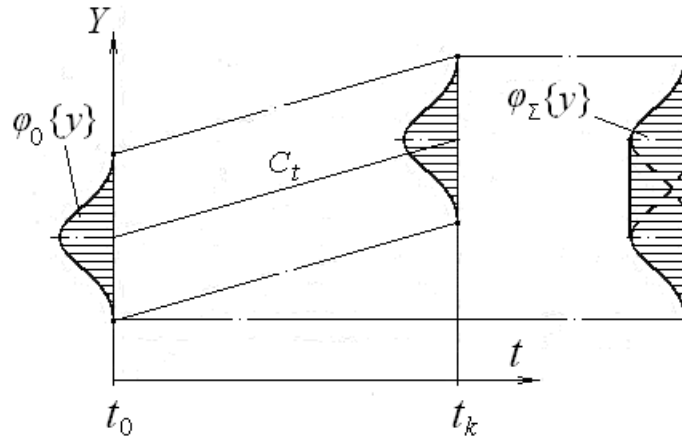


Рис. 3.2. Теоретическая точностная диаграмма с C_t и σ_0

Схема 3

$$Y_t = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{s=1}^p X_s^{(t)},$$

где $X_s^{(t)}$ - независимые случайные слагаемые, число которых (или значения параметров их рассеивания) изменяется в зависимости от времени, а средние значения равны нулю.

При названных условиях распределение величины Y для момента времени t описывается законом Гаусса

$$\varphi_t\{y\} = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_0)^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

Суммарное распределение величины Y для промежутка времени от t_0 до t_k имеет вид

$$\varphi_\Sigma\{y\} = \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - m_0)^2}{2\sigma_t^2}\right] dt.$$

Теоретическая точностная диаграмма такого процесса приведена на рис. 3.3.

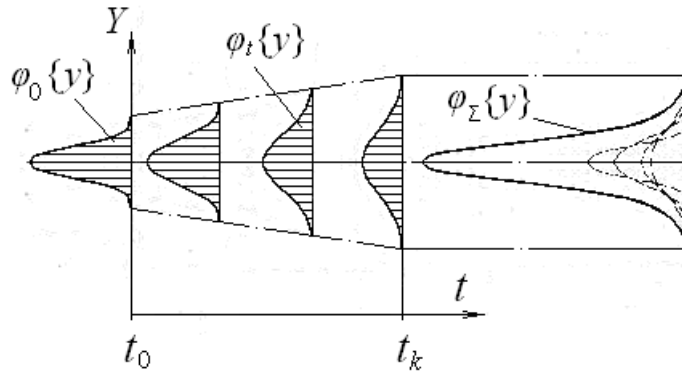


Рис. 3.3. Теоретическая точностная диаграмма с m_0 и σ_t

Схема 4

$$Y_t = \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{s=1}^p X_s^{(t)} + C_t.$$

$$\varphi_t\{y\} = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - C_t)^2}{2\sigma_t^2}\right].$$

$$\varphi_\Sigma\{y\} = \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y - C_t)^2}{2\sigma_t^2}\right] dt.$$

Теоретическая точностная диаграмма такого процесса приведена на рис. 3.4.

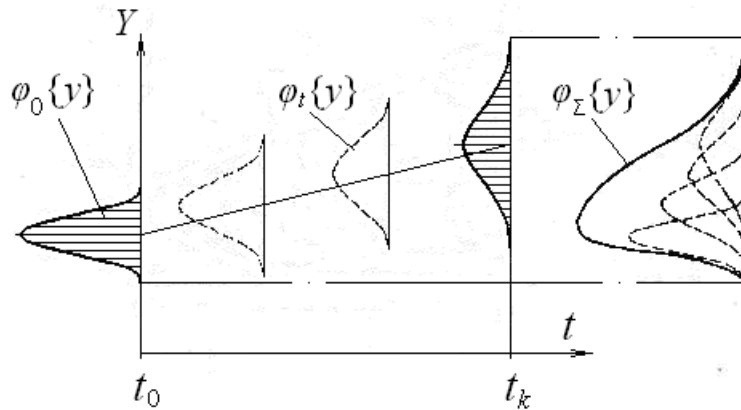


Рис. 3.4. Теоретическая точностная диаграмма с C_t и σ_t

От конкретного вида функций C_t и σ_t зависят те сложности, которые могут встретиться при вычислении суммарных распределений. В некоторых случаях бывает достаточным получение только числовых характеристик суммарных распределений $m_\Sigma\{y\}$ и $\sigma_\Sigma^2\{y\}$, которые могут быть определены из выражений

$$m_\Sigma\{y\} \approx m\{C_t\}; \quad \sigma_\Sigma^2 \approx m^2\{\sigma_t\} + \sigma^2\{C_t\} + \sigma^2\{\sigma_t\}. \quad (3.1)$$

Используя схемы Н.А. Бородачева можно по-другому взглянуть на сущность линейной корреляционной зависимости между двумя случайными величинами X и Y . Представим каждую из них в виде суммы большого числа независимых или малозависимых величин Z_i, S_j, Q_f .

$$X = \sum_{i=1}^k Z_i + \sum_{j=1}^l S_j = Z + S; \quad Y = \sum_{i=1}^k Z_i + \sum_{f=1}^m Q_f = Z + Q.$$

Каждая из сумм Z , S и Q может рассматриваться как случайная величина с распределением, близким к нормальному. Это же самое можно сказать и о величинах X и Y . Если $Z - S$ и $Z - Q$ можно считать попарно независимыми, то этого нельзя сказать относительно X и Y , поскольку на каждую из этих величин оказывают влияние факторы Z_i . На основании вышеизложенного можно записать

$$\begin{aligned} m\{X\} &= m\{Z\} + m\{S\}; \quad m\{Y\} = m\{Z\} + m\{Q\}; \\ \sigma^2\{X\} &= \sigma^2\{Z\} + \sigma^2\{S\}; \quad \sigma^2\{Y\} = \sigma^2\{Z\} + \sigma^2\{Q\}; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$R\{X, Y\} = \frac{\sigma^2\{Z\}}{\sigma\{X\} \cdot \sigma\{Y\}} = \frac{\sigma^2\{Z\}}{\sqrt{(\sigma^2\{Z\} + \sigma^2\{S\}) \cdot (\sigma^2\{Z\} + \sigma^2\{Q\})}}. \quad (3.3)$$

Таким образом, линейная корреляционная зависимость между двумя случайными величинами (например, X и Y), существует в том случае, если на каждую из них оказывает влияние общая группа факторов. Чем выше доля общих факторов, влияющих на случайные величины, тем сильнее корреляционная зависимость между этими величинами.

4. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОКОМПРЕССИОННОЙ СВАРКИ

Рассмотрим процесс построения уравнения регрессии для случая нескольких входных параметров W_1, \dots, W_N , т.е.

$$\tilde{Y} = f\{W_1, \dots, W_i, \dots, W_N\}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Подобные модели чаще всего строятся методом полного факторного эксперимента (ПФЭ), сущность которого рассмотрим на примере [14] – исследовании технологического процесса термокомпрессионной сварки. Известно, что прочность соединения (количественно измеряемая как усилие на разрыв) зависит от таких факторов, как температура сварки, время сварки и давления инструмента на вывод.

Введем обозначения:

W_1 – температура сварки, °C;

W_2 – время сварки, с;

W_3 – усилие нажатия инструмента, сН;

Y – усилие отрыва, сН.

Определим диапазоны изменения и сходных факторов (обычно эти данные берут из справочной литературы – соответствующих стандартов, технологической документации аналогичных предприятий и т.д.).

Заносим исходные данные в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Параметр	Температура, °C	Время сварки, с	Усилие нажатия инструмента, сН
Обозначение	W_1	W_2	W_3
Основной уровень (среднее значение) w_{0i}	260	1,2	525
Интервал варьирования (разница между средним и крайними значениями) Δw_i	40	0,4	175
Верхний уровень (максимальное значение фактора) w_{Bi}	300	1,6	700
Нижний уровень (минимальное значение фактора) w_{Hi}	220	0,8	350

Поскольку первичные факторы имеют различные единицы измерения, их приводят к единой системе счисления путем перехода от действительных

значений к кодированным (w_{Bk} и w_{Hk}). Этот переход осуществляется по формулам

$$w_{Bk} = \frac{w_{Bi} - w_{0i}}{\Delta w_i}; \quad w_{Hk} = \frac{w_{Hi} - w_{0i}}{\Delta w_i}; \quad w_{0k} = \frac{w_{0i}}{\Delta w_i}.$$

Для упрощения записей вместо обозначений w_{Bk} , w_{Hk} и w_{0k} вводят соответственно: +1, -1 и 0.

Далее разрабатывается стратегия эксперимента. Минимальное количество опытов при числе факторов N равно 2^N (у нас $2^3 = 8$). Поскольку в нашем примере не исключено влияние факторов типа **Z** (в этом случае выходной параметр Y может рассматриваться как случайная величина), то каждый опыт необходимо повторить несколько раз. В нашем примере сделаем четыре повтора для каждого варианта входных параметров (всего $4 \cdot 2^3 = 32$ опыта). Чтобы рандомизировать (т.е. сделать случайным) влияние предыдущего опыта на результат последующего, в каждой серии опытов порядок установки исходных факторов должен быть различным.

Порядок проведения ПФЭ.

1. Составляем матрицу эксперимента (левая часть табл. 4.2 показывает варианты установок исходных факторов).

Таблица 4.2

№ п/п	Значения факторов								Усилие отрыва в каждой серии опытов				\bar{y}_i	$\sigma_i^2\{y\}$	\tilde{y}_i
	w_0	w_1	w_2	w_3	$w_1 w_2$	$w_1 w_3$	$w_2 w_3$	$w_1 w_2 w_3$	1	2	3	4			
1	+	-	-	-	+	+	+	-	60	120	100	80	90	666,6	89,7
2	+	+	-	-	-	-	+	+	250	175	220	230	218,9	1006,2	225,3
3	+	-	+	-	-	+	-	+	125	160	95	80	115	1250	115,3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	220	225	205	175	206,2	506,2	199,7
5	+	-	-	+	+	-	-	+	225	195	210	190	205	250	186
6	+	+	-	+	-	+	-	-	235	155	275	245	227,5	2625	215,4
7	+	-	+	+	-	-	+	-	125	115	180	145	141,2	833	160,4
8	+	+	+	+	+	+	+	+	225	130	250	260	228,7	1273	241

2. Выполняем эксперимент (т.е. определяем усилия отрыва при различных значениях исходных факторов). Заносим результаты в таблицу (средняя часть).

3. Рассчитываем построчные значения средних арифметических \bar{y}_i и дисперсий $\sigma_i^2\{y\}$. Заполняем соответствующие графы.

4. Оцениваем воспроизводимость эксперимента (т.е. однородность дисперсий), вычисляя значение критерия Кохрена

$$G_{\max} = \frac{\sigma_{\max}^2\{y\}}{\sum_{i=1}^N \sigma_i^2\{y\}},$$

где $\sigma_{\max}^2\{y\}$ – максимальное значение из $\sigma_i^2\{y\}$ ($i = \overline{1, N}$).

Если вычисленное значение не превышает соответствующего табличного, то эксперимент считается воспроизводимым (как в нашем случае). Иначе эксперимент необходимо повторить при более узких диапазонах варьирования исходных факторов и/или при увеличенном числе параллельных опытов.

Также рассчитаем среднее значение дисперсий:

$$\sigma_{cp}^2\{y\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2\{y\} \approx 1050.$$

5. Рассчитываем постоянные коэффициенты полиномиальной модели

$$b_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N \bar{y}_i = \frac{1}{8} \cdot (90 + 218,9 + 115 + 206,2 + 205 + 227,5 + 141,2 + 228,7) = 179,1.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты при линейных членах, парных и тройных произведениях (знак для каждого слагаемого берется из левой части табл. 4.2).

$$b_{w_1} = \frac{1}{8} \cdot (-90 + 218,9 - 115 + 206,2 - 205 + 227,5 - 141,2 + 228,7) = 41,2;$$

$$b_{w_2} = \frac{1}{8} \cdot (-90 - 218,9 + 115 + 206,2 - 205 - 227,5 + 141,2 + 228,7) = -6,29;$$

$$b_{w_3} = 21,6; \quad b_{w_1w_2} = 3,4; \quad b_{w_1w_3} = -13,75; \quad b_{w_2w_3} = -9,37; \quad b_{w_1w_2w_3} = 12,81.$$

Уравнение регрессии принимает вид

$$\tilde{Y} = 179,1 + 42,2W_1 - 6,29W_2 + 21,6W_3 + 3,4W_1W_2 - 13,75W_1W_3 - 9,37W_2W_3 + 12,81W_1W_2W_3.$$

6. Проверяем гипотезу о значимости коэффициентов b_j . Для этого вычисляем значения

$$t_j = |b_j| \cdot \sqrt{\frac{N\alpha}{\sigma_{cp}^2\{y\}}},$$

где α – число серий опытов (в нашем случае $\alpha = 4$).

Коэффициенты b_j , для которых параметры t_j окажутся меньше соответствующих табличных значений критерия Стьюдента, могут считаться пренебрежимо малыми.

Расчеты показывают:

$$t_0 = 31,3; \quad t_1 = 7,2; \quad t_2 = 1,09; \quad t_3 = 3,76; \quad t_{12} = 0,6; \quad t_{13} = 2,4; \quad t_{23} = 1,64; \quad t_{123} = 2,2.$$

С вероятностью 0,95 значимыми признаются коэффициенты b_0, b_1, b_3, b_{13} и b_{123} . В итоге получаем

$$\tilde{Y} = 179,1 + 41,2W_1 + 21,6W_3 - 13,75W_1W_3 + 12,8W_1W_2W_3. \quad (4.1)$$

Подставляя в выражение (4.1) значения исходных факторов из левой части табл. 4.2 (т.е. -1 и +1 в разных сочетаниях), получим расчетные величины, которые приведены в правом крайнем столбце таблицы (\tilde{y}_i). Заметим, что значения исходных факторов в модель (4.1) необходимо подставлять в нормированном виде (т.е. в виде чисел диапазона от -1 до +1 включительно).

7. Для проверки адекватности полученной модели рассчитываем дисперсию адекватности

$$\sigma_{адекв}^2 = \frac{1}{N-d} \cdot \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \tilde{y}_i)^2 = 370,$$

где d – число значимых членов модели (в нашем примере $d = 5$).

Определяем критерий Фишера

$$F = \frac{\sigma_{адекв}^2}{\sigma_{cp}^2\{y\}} = \frac{370}{1050} = 0,35$$

и сравниваем его с табличным значением (для нашего случая с вероятностью 0,95 можно утверждать, что модель адекватна технологическому процессу).

Из выражения (4.1) можно также найти значения факторов W_1 , W_2 и W_3 , при которых прочность сварного соединения будет максимальной.

5. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ

5.1. Основные геометрические параметры многослойных печатных плат

Параметры многослойных печатных плат (МПП), которые обычно [2, 3] называют основными геометрическими параметрами (ОГП) приведены на рис. 5.1 и в табл. 5.1.

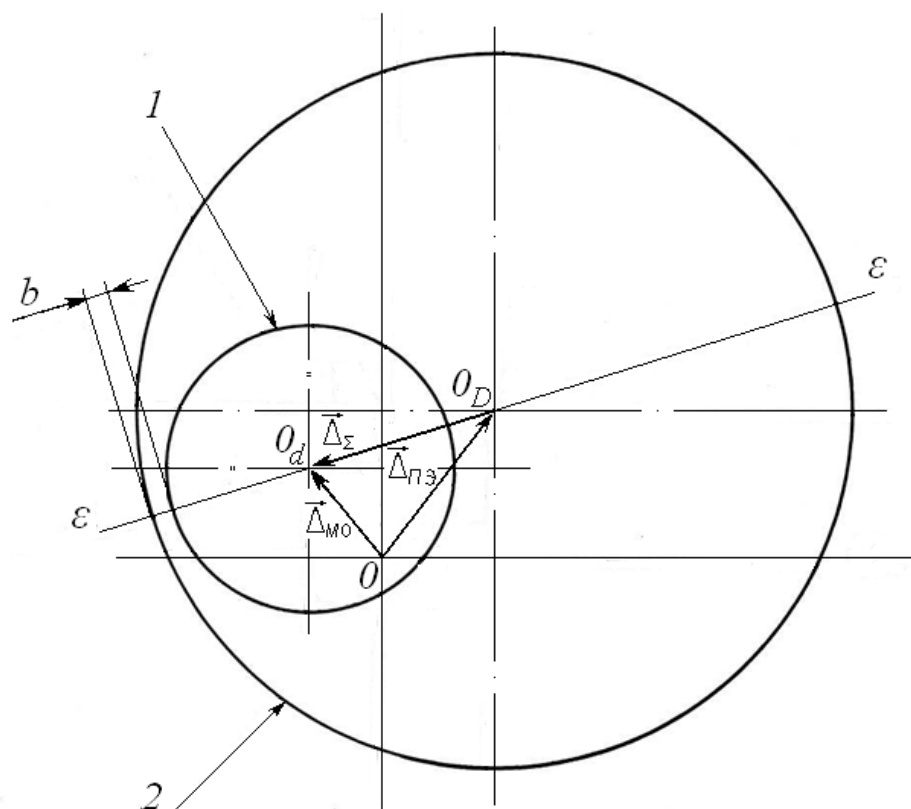


Рис. 5.1. Произвольное взаимное расположение монтажного отверстия (1) и контактной площадки (2):

O – номинальное положение центра монтажного отверстия и окружающей его контактной площадки; O_d – фактическое положение центра монтажного отверстия; O_D – фактическое положение центра контактной площадки; $\varepsilon\varepsilon$ – вспомогательная ось, проходящая через центры монтажного отверстия и контактной площадки; $\vec{\Delta}_{MO}$ – радиус-вектор смещения центра монтажного отверстия относительно номинального положения; $\vec{\Delta}_{ΠЭ}$ – радиус-вектор смещения центра контактной площадки относительно номинального положения; $\vec{\Delta}_{\Sigma}$ – радиус-вектор отклонения центра монтажного отверстия относительно центра контактной площадки; b – гарантийный пояс контактной площадки

Таблица 5.1

№ п/п	Параметр		Погрешность	Допуск
	Наименование	Обозначение		
1	Ширина печатного проводника	t	δt^{Σ}	Δt
2	Диаметр монтажного отверстия	d	δd^{Σ}	Δd
3	Диаметр контактной площадки	D	δD^{Σ}	ΔD
4	Смещение относительно номинального положения: а) печатного элемента;	$\vec{\Delta}_{ПЭ}$	Δ_D^{Σ}	T_D
5	б) монтажного отверстия	$\vec{\Delta}_{МО}$	Δ_d^{Σ}	T_d
6	Гарантийный пояс контактной площадки	b	δb	Δb

ОГП МПП связаны между собой следующими соотношениями:

$$\vec{\Delta}_{\Sigma} = \vec{\Delta}_{МО} - \vec{\Delta}_{ПЭ};$$

$$b = \frac{D}{2} - \frac{d}{2} - \Delta_{\Sigma}. \quad (5.1)$$

Построение математических моделей ОГП МПП осуществляется в несколько этапов [9]:

1. Построение математических моделей операционных погрешностей ОГП МПП.
2. Построение математических моделей суммарных погрешностей ОГП МПП (δt^{Σ} , δd^{Σ} , δD^{Σ} , Δ_D^{Σ} , Δ_d^{Σ}).
3. Построение математических моделей ОГП МПП, представляющих собой функции других параметров (Δ_{Σ} , b).

Схема формирования погрешностей ОГП МПП приведена на рис. 5.2.

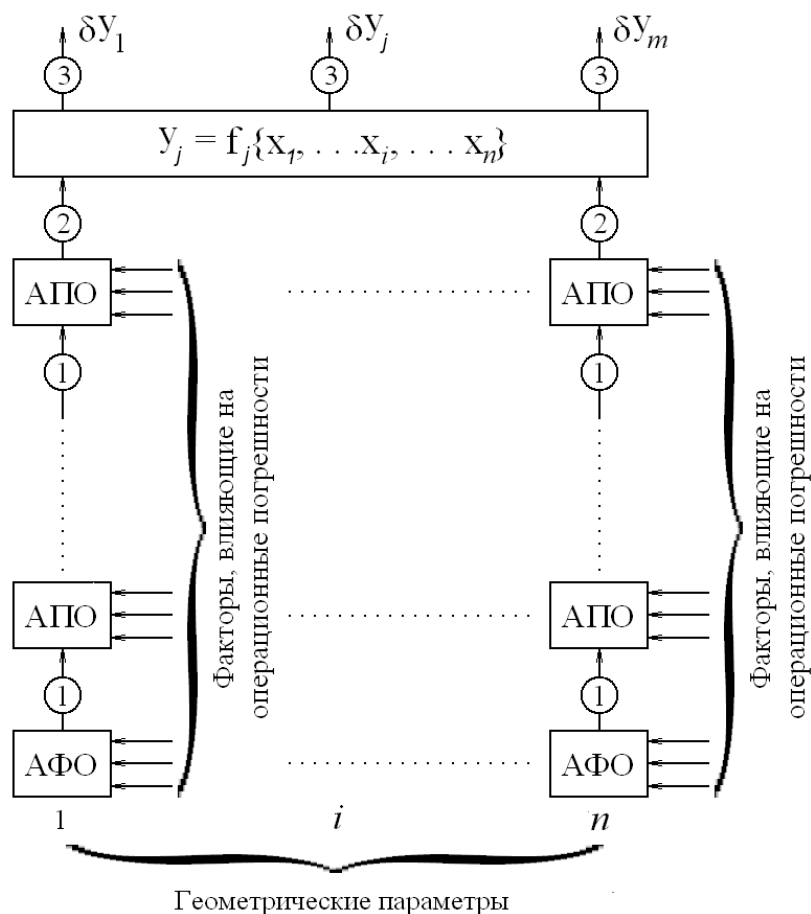


Рис. 5.2. Схема формирования погрешностей ОГП МПП:
1 – операционные погрешности; 2 – суммарные погрешности; 3 – погрешности, представляющие собой функции погрешностей ОГП

5.2. Технологический процесс изготовления МПП и его операционные погрешности

На рис. 5.3 приведена схема одного из вариантов базового метода изготовления МПП типа металлизации сквозных отверстий [12]. Операции, оказывающие влияние на точность размеров и расположения печатных элементов и монтажных отверстий (АФО и АПО), выделены двойной линией. Рассмотрим кратко погрешности этих операций.

5.2.1. Погрешности размеров печатных элементов и монтажных отверстий

Суммарная погрешность размеров печатных элементов $\delta D^{\Sigma}(\delta^{\Sigma})$ является функцией следующих составляющих (табл. 5.2): погрешности размеров

печатных элементов на фотошаблоне $\delta D^{\Phi\Pi}(\delta^{\Phi\Pi})$, изменения этих размеров на операциях получения защитного рельефа $\delta D^{\Phi X}(\delta^{\Phi X})$, травления меди $\delta D^{TP}(\delta^{TP})$, гальванического осаждения меди и покрытий $\delta D^{\Gamma}(\delta^{\Gamma})$, а также оплавления покрытия $\delta D^{OP}(\delta^{OP})$.

Суммарная погрешность размеров монтажных отверстий является функцией в основном четырех составляющих: погрешности сверления δd^C , травления диэлектрика δd^T , гальванического осаждения меди и покрытий δd^{Γ} , а также оплавления покрытия δd^{OP} .

Теоретические и экспериментальные исследования показывают:

- что каждая из перечисленных погрешностей зависит от значительного числа факторов систематического и случайного характера, это дает основание рассматривать эти погрешности как случайные величины;

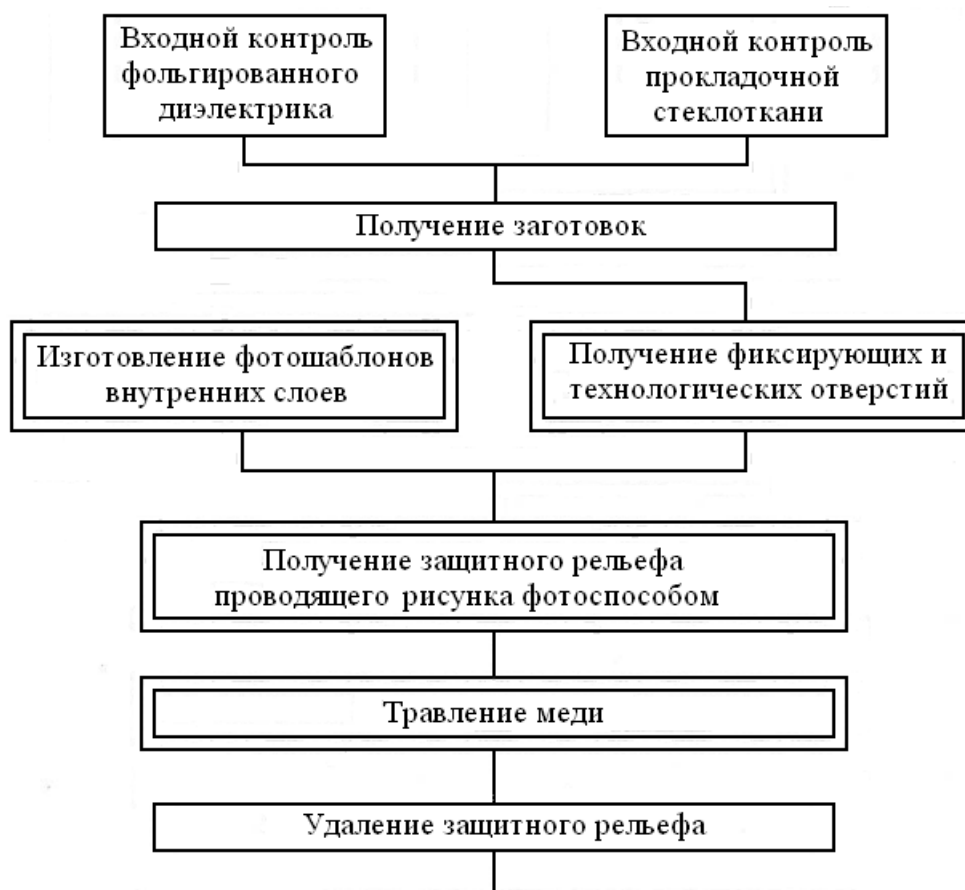


Рис. 5.3. Схема изготовления МПП (окончание см. на с. 52)

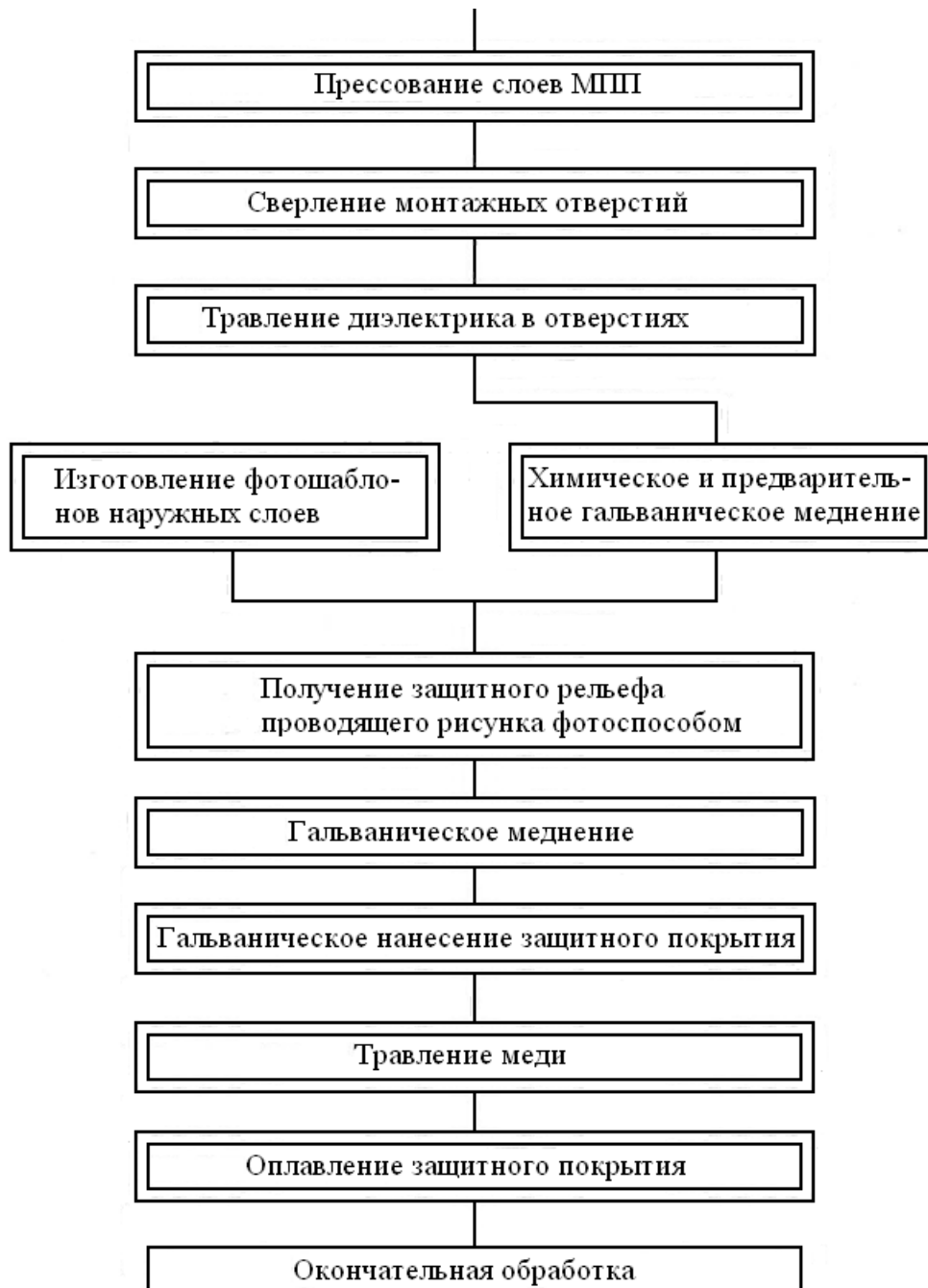
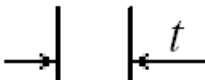
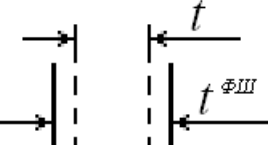
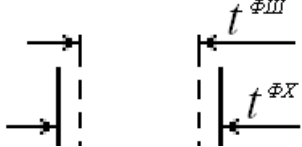
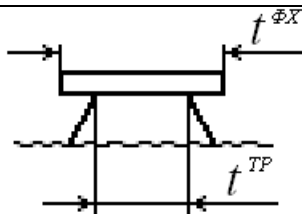
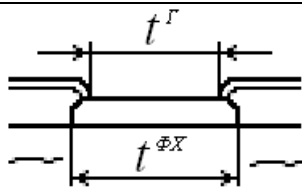
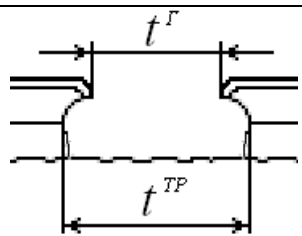
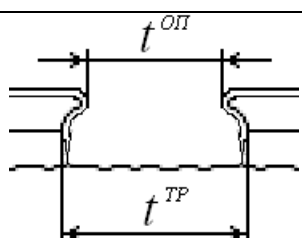


Рис. 5.3. Окончание (начало см. на с. 51)

- погрешности отдельных операций практически независимы между собой;
- между h_{Γ} – толщиной гальванически осаждаемых металлов (меди и покрытий) и погрешностью $\delta D^{\Gamma}(\delta^{\Gamma})$ существует корреляционная зависимость.

Таблица 5.2

Изменение ширины печатных проводников

№ п/п	Параметр			Погрешность операции
	Наименование	Обозначение	Рисунок	
На внутренних слоях МПП				
1	Ширина проводника (ШП) по КД	t		-
2	ШП на фотошаблоне	$t^{\Phi Ш}$		$\delta t^{\Phi Ш} = t^{\Phi Ш} - t$
3	ШП на контактной маске	$t^{\Phi X}$		$\delta t^{\Phi X} = t^{\Phi X} - t^{\Phi Ш}$
4	ШП после травления	t^{TP}		$\delta t^{TP} = t^{TP} - t^{\Phi X}$
На внешних слоях МПП (пп. 1–3 повторяются)				
4	ШП после гальваниче- ского осаждения	t^{Γ}	 См. также рис. 5.4	$\delta t^{\Gamma} = t^{\Gamma} - t^{\Phi X}$
5	ШП после травления	t^{TP}	 См. также рис. 5.5	$\delta t^{TP} = t^{TP} - t^{\Gamma}$
6	ШП после оплавления	t^{OP}		$\delta t^{OP} = t^{OP} - t^{TP}$

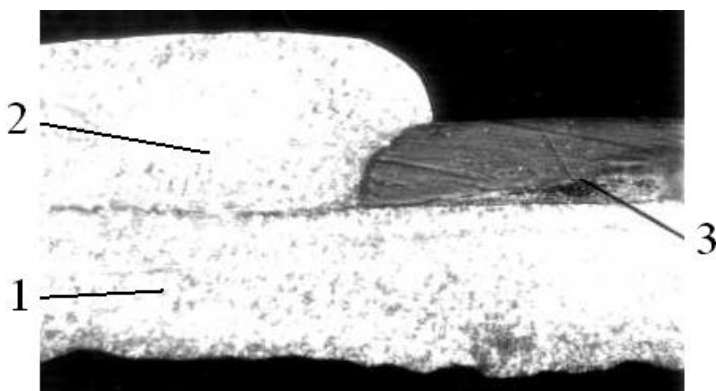


Рис. 5.4. Профиль печатного элемента после гальванического осаждения меди:
1 – фольга; 2 – гальваническая медь;
3 – сухой пленочный фоторезист

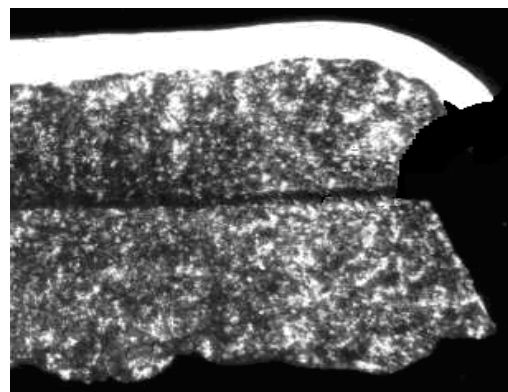


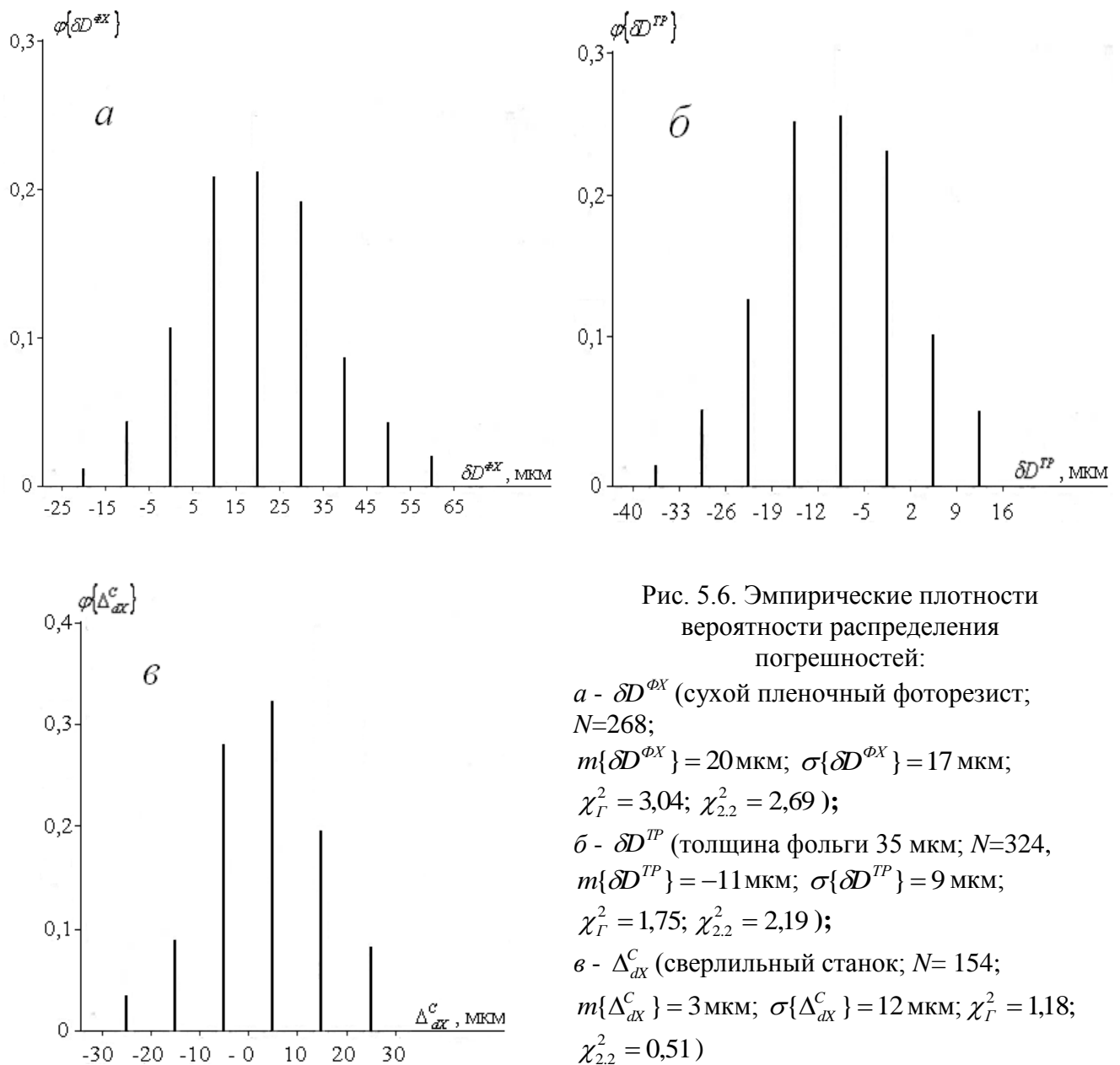
Рис. 5.5. Профиль печатного элемента после травления

Результаты экспериментальных исследований некоторых погрешностей (столбиковые диаграммы) приведены на рис. 5.6 (где N – число измерений, χ^2 и $\chi^2_{2.2}$ – значения критерия Пирсона при сравнении эмпирического распределения соответственно с распределением Гаусса и (2.2).

Как показывают расчеты χ^2 -критерия, в качестве теоретических распределений для этих погрешностей в наибольшей степени подходят закон Гаусса и распределение (2.2).

Расчет числовых характеристик распределения суммарных погрешностей может производиться по следующим формулам:

$$\begin{aligned} m\{\delta D^{\Sigma}\} &= m\{\delta D^{\Phi III}\} + m\{\delta D^{\Phi X}\} + m\{\delta D^{TP}\} + m\{\delta D^{\Gamma}\} + m\{\delta D^{OP}\}; \\ \sigma^2\{\delta D^{\Sigma}\} &= \sigma^2\{\delta D^{\Phi III}\} + \sigma^2\{\delta D^{\Phi X}\} + \sigma^2\{\delta D^{TP}\} + \sigma^2\{\delta D^{\Gamma}\} + \sigma^2\{\delta D^{OP}\}; \\ m\{\delta d^{\Sigma}\} &= m\{\delta d^C\} + m\{\delta d^T\} + m\{\delta d^{\Gamma}\} + m\{\delta d^{OP}\}; \\ \sigma^2\{\delta d^{\Sigma}\} &= \sigma^2\{\delta d^C\} + \sigma^2\{\delta d^T\} + \sigma^2\{\delta d^{\Gamma}\} + \sigma^2\{\delta d^{OP}\}. \end{aligned}$$



5.2.2. Погрешности расположения печатных элементов и монтажных отверстий

Отклонения координат печатных элементов и монтажных отверстий относительно номинальных положений являются следствием в основном трех групп погрешностей:

- 1) позиционирования рабочих органов технологического оборудования (фотоплоттеров – при изготовлении фотошаблонов и шпинделя сверлильного станка – при получении монтажных отверстий);
- 2) совмещения (рабочего фотошаблона и заготовки, слоев перед

прессованием) и базирования плат на сверлильном станке; погрешности, в свою очередь, зависят от фактических размеров фиксирующих технологических отверстий (ФТО) и сопрягающихся с ними штырей, а также от точности их расположения;

3) изменения координат печатных элементов и ФТО на фотошаблонах и слоях вследствие размерной нестабильности фотопленок и тонких фольгированных диэлектриков.

Погрешности позиционирования фотоплоттеров ($\Delta_D^{\Phi\Pi\Pi}$) и сверлильных станков (Δ_d^C) определяются в основном конструктивным исполнением оборудования. Для лучших отечественных и зарубежных моделей точность позиционирования составляет величину $+0.005...0,05$ мм. Распределение проекций этих погрешностей на оси координат $\Delta_{DX,Y}^{\Phi\Pi\Pi}$ и $\Delta_{dx,y}^C$ близко к нормальному и (2.2). В общем случае между соответствующими проекциями этих погрешностей может существовать корреляционная зависимость, характерная для большинства машин с координатным перемещением и обусловленная суммарным воздействием некоторых общих факторов (температуры и т.д.), влияющих на точность установки рабочих органов по осям X и Y .

Операции, связанные с совмещением и базированием при изготовлении МШ, повторяются неоднократно, в результате чего соответствующие погрешности суммируются и могут достичь значительной величины. Эта группа погрешностей исследована в меньшей степени, тем не менее есть все основания рассматривать погрешности совмещения и базирования как случайные величины.

При изготовлении фотошаблонов на пленке изображения печатных элементов получают дополнительные смещения относительно своих номинальных положений вследствие размерной нестабильности (усадки или удлинения по осям X и Y отдельных участков) подложек фотошаблонов, наблюдаемой после химико-фотографической обработки, а также в процессе дальнейшего хранения и эксплуатации (погрешность $\Delta_D^{\Phi\Pi\Pi(Y)}$).

Аналогичные изменения координат печатных элементов происходят при изготовлении слоев из тонких фольгированных диэлектриков (погрешность). Причиной размерной нестабильности последних принято считать напряжения, возникающие в процессе производства фольгированных диэлектриков. При стравливании фольги эти напряжения вызывают деформацию (усадку или удлинение) диэлектрического основания.

Для оценки размерной нестабильности фотопленок и тонких фольгированных диэлектриков используются предельные значения коэффициента относительной деформации, приводимые в ТУ на материал (обычно +0,05... 0,10 %). Замечено, что коэффициент относительной деформации может изменять свои значения, как от партии однотипного материала, так и в пределах одной партии. Более того, результатами многих исследований установлено, что в пределах даже одного фотошаблона (или слоя) отдельные его участки равных размеров деформируются не в одинаковой степени, что позволяет величину деформации таких участков рассматривать как случайную величину.

Изменения координат печатных элементов также происходят в процессе прессования (погрешность Δ_D^{PP}). Погрешность эта мало исследована, однако экспериментально подтверждено [12], что она носит случайный характер (рис. 5.7).

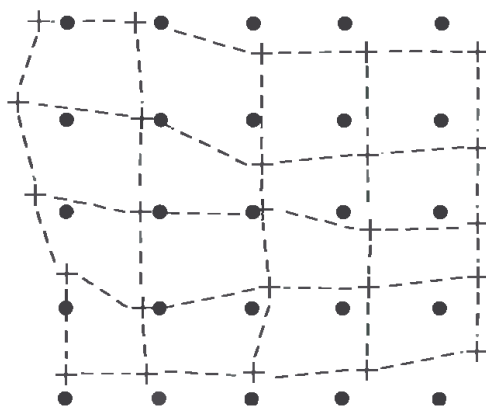


Рис. 5.7. Экспериментальная диаграмма смещения тонкого фольгированного диэлектрика при прессовании

Поскольку смещения печатных элементов в направлении каждой из осей координат (X и Y) происходят при воздействии ряда общих факторов (режимы изготовления, условия обработки и т.д.), то естественно предположить, что между проекциями соответствующих погрешностей существуют связи, близкие к корреляционным.

Таким образом, выражения для проекций суммарных погрешностей $\Delta_{DX,Y}^{\Sigma}$ и $\Delta_{dX,Y}^{\Sigma}$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\Delta_{DX,Y}^{\Sigma} = \Delta_{DX,Y}^{\Phi III} + \Delta_{DX,Y}^{TP} + \Delta_{DX,Y}^{IP} + \sum_{i=1}^n \Delta_{DX,Y}^{CB},$$

$$\Delta_{dX,Y}^{\Sigma} = \Delta_{dX,Y}^C + \Delta_{dX,Y}^B, \quad (5.2)$$

где $\Delta_{DX,Y}^{\Phi III}$ – погрешность расположения изображений печатных элементов на фотошаблоне, определяемая как

$$\Delta_{DX,Y}^{\Phi III} = \Delta_{DX,Y}^{\Phi III (П)} + \Delta_{DX,Y}^{\Phi III (Y)};$$

$\sum_{i=1}^n \Delta_{DX,Y}^{CB}$ – сумма погрешностей совмещения; $\Delta_{dX,Y}^B$ – погрешность базирования платы на сверлильном станке.

Поскольку слагаемые в выражении (5.2) могут рассматриваться случайными величинами, независимыми между собой, то выражения для расчета числовых характеристик распределения суммарных погрешностей будут иметь вид

$$m\{\Delta_{DX,Y}^{\Sigma}\} = m\{\Delta_{DX,Y}^{\Phi III}\} + m\{\Delta_{DX,Y}^{TP}\} + m\{\Delta_{DX,Y}^{IP}\} + m\{\sum_{i=1}^n \Delta_{DX,Y}^{CB}\},$$

$$m\{\Delta_{dX,Y}^{\Sigma}\} = m\{\Delta_{dX,Y}^C\} + m\{\Delta_{dX,Y}^B\},$$

$$\sigma^2\{\Delta_{DX,Y}^{\Sigma}\} = \sigma^2\{\Delta_{DX,Y}^{\Phi III}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX,Y}^{TP}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX,Y}^{IP}\} + \sigma^2\{\sum_{i=1}^n \Delta_{DX,Y}^{CB}\},$$

$$\sigma^2\{\Delta_{dX,Y}^{\Sigma}\} = \sigma^2\{\Delta_{dX,Y}^C\} + \sigma^2\{\Delta_{dX,Y}^B\},$$

Как показывают теоретические и экспериментальные исследования, распределения погрешностей $\Delta_{DX,Y}^{\Sigma}$ и $\Delta_{dX,Y}^{\Sigma}$ близки к закону Гаусса и распределению (2.2), а Δ_D^{Σ} и Δ_d^{Σ} – к обобщенному распределению Максвелла (2.6).

5.2.3. Учет погрешностей измерений

Инженерам-технологам, обслуживающим производство МПП, полезно иметь данные по точности выполнения АФО и АПО. На их основе могут решаться два вида задач:

1) расчет ожидаемой точности параметров МПП, планируемых к изготовлению (задача анализа);

2) определение требований к точности технологического оборудования, характеристикам основных (фольгированным диэлектрикам) и вспомогательных (фотопленкам) материалов, необходимых для изготовления МПП заданного класса точности (задача синтеза).

Если задача анализа имеет единственное решение, то задача синтеза – множество. Из этого множества необходимо выбрать оптимальное (например, изготовление МПП при минимальных затратах).

Характеристики операционных погрешностей снимают с тестовых структур, представляющих собой систему печатных проводников, ширина которых и зазоры между ними обычно выбираются по ГОСТ 23751-86[2]. Часто в тестовые структуры включают также металлизированные отверстия с целью контроля толщины осажденной в них меди. Тестовые структуры выполняют в виде отдельных плат, периодически запускаемых в производство, или наносят на технологическое поле заготовок товарных плат.

После АФО и АПО измеряют ширину печатных проводников t_{jk}^i , $i = \overline{1, N}$, $j = \overline{1, M}$, $k = \overline{1, P}$ (где N – количество АФО и АПО; M – количество проводников на тестовой структуре; P – количество тестовых структур). Операционную погрешность определяют так:

а) для АФО

$$\delta t_{jk}^1 = t_{jk}^1 - t_{jk}^{ном},$$

где $t_{jk}^{ном}$ – номинальное значение ширины печатного проводника с индексами j и k ;

б) для АПО

$$\delta_{jk}^i = t_{jk}^i - t_{jk}^{i-1},$$

где i – порядковый номер операции, в т.ч. АФО (т.е. для АПО $i \geq 2$).

Для каждой операции получают $j \cdot k$ значений операционной погрешности δ^i , что дает основание рассматривать любую из них как независимую случайную величину (см. также рис. 5.6) с математическим ожиданием $m\{\delta^i\}$ и дисперсией $\sigma^2\{\delta^i\}$.

Допустим, что мы получили числовые характеристики операционных погрешностей изготовления проводников наружных слоев МПП (см. также табл. 5.2) $m\{\delta^{\Phi III}\}$, $m\{\delta^{\Phi X}\}$, $m\{\delta^{\Gamma}\}$, $m\{\delta^{TP}\}$, $m\{\delta^{OP}\}$, $\sigma^2\{\delta^{\Phi III}\}$, $\sigma^2\{\delta^{\Phi X}\}$, $\sigma^2\{\delta^{TP}\}$, $\sigma^2\{\delta^{OP}\}$.

Тогда ожидаемые расчетные значения числовых характеристик суммарной погрешности можно получить из формул

$$m_p\{\delta^{\Sigma}\} = m\{\delta^{\Phi III}\} + m\{\delta^{\Phi X}\} + m\{\delta^{TP}\} + m\{\delta^{\Gamma}\} + m\{\delta^{OP}\}; \quad (5.3)$$

$$\sigma_p^2\{\delta^{\Sigma}\} = \sigma^2\{\delta^{\Phi III}\} + \sigma^2\{\delta^{\Phi X}\} + \sigma^2\{\delta^{TP}\} + \sigma^2\{\delta^{\Gamma}\} + \sigma^2\{\delta^{OP}\}.$$

Если сравнить расчетные и экспериментальные значения числовых характеристик суммарной погрешности, то получим следующие соотношения

$$m_p\{\delta^{\Sigma}\} \approx m_{\Sigma}\{\delta^{\Sigma}\}, \quad \sigma_p^2\{\delta^{\Sigma}\} > \sigma_{\Sigma}^2\{\delta^{\Sigma}\}.$$

Неравенство дисперсий можно объяснить разным влиянием погрешностей измерений на каждую из них. Рассмотрим это влияние подробнее.

Каждое измерение ширины проводника включает в себя истинное значение (обозначим знаком $*$) и значение погрешности данного измерения Δ_{jk}^i :

$$t_{jk}^i = t_{jk}^{i*} + \Delta_{jk}^i.$$

Рассчитываемое значение операционной погрешности включает в себя

а) для АФО – истинное значение погрешности и одно значение погрешности измерения

$$\delta_{jk}^1 = t_{jk}^1 - t_{jk}^{ном} = \delta_{jk}^{1*} + \Delta_{jk}^1,$$

б) для АПО – истинное значение погрешности и значения двух погрешностей измерений

$$\delta t_{jk}^i = t_{jk}^i - t_{jk}^{i-1} = t_{jk}^{i*} + \Delta_{jk}^i - t_{jk}^{(i-1)*} - \Delta_{jk}^{i-1} = \delta t_{jk}^{i*} + \Delta_{jk}^i - \Delta_{jk}^{i-1}.$$

Величины Δ_{jk}^1 , Δ_{jk}^{i-1} и Δ_{jk}^i представляют собой конкретные значения (например, +1 мкм, +2 мкм или -1 мкм), а Δ^1 , Δ^{i-1} и Δ^i – совокупность из $j \cdot k$ значений погрешности измерения, что дает основание рассматривать любую из них как независимую случайную величину с числовыми характеристиками

$$m\{\Delta^1\}, m\{\Delta^{i-1}\}, m\{\Delta^i\}, \sigma^2\{\Delta^1\}, \sigma^2\{\Delta^{i-1}\}, \sigma^2\{\Delta^i\}.$$

Если все измерения выполнены одним измерительным средством (или несколькими одного типа) с погрешностью измерения $\Delta^{ИЗМ}$, то можно записать

$$m\{\Delta^1\} \approx m\{\Delta^{i-1}\} \approx m\{\Delta^i\} \approx m\{\Delta^{ИЗМ}\}, \quad \sigma^2\{\Delta^1\} \approx \sigma^2\{\Delta^{i-1}\} \approx \sigma^2\{\Delta^i\} \approx \sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\}.$$

Переходя от конкретных значений к случайным величинам, запишем:

а) для АФО

$$\begin{aligned} m\{\delta t^{1*}\} &= m\{\delta t^1\} - m\{\Delta^1\} \approx m\{\delta t^1\} - m\{\Delta^{ИЗМ}\}, \\ \sigma^2\{\delta t^{1*}\} &= \sigma^2\{\delta t^1\} + \sigma^2\{\Delta^1\} \approx \sigma^2\{\delta t^1\} - \sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\}; \end{aligned}$$

б) для АПО

$$\begin{aligned} m\{\delta t^{i*}\} &= m\{\delta t^i\} - m\{\Delta^i\} + m\{\Delta^{i-1}\} \approx m\{\delta t^i\} - m\{\Delta^{ИЗМ}\} + m\{\Delta^{ИЗМ}\} = m\{\delta t^i\}, \\ \sigma^2\{\delta t^{i*}\} &= \sigma^2\{\delta t^i\} - \sigma^2\{\Delta^i\} - \sigma^2\{\Delta^{i-1}\} \approx \sigma^2\{\delta t^i\} - \sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\} - \sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\} = \sigma^2\{\delta t^i\} - 2\sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\}. \end{aligned}$$

Выражение (5.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} m_P\{\delta t^\Sigma\} &\approx m\{\delta t^{\Phi\Pi*}\} + m\{\delta t^{\Phi X*}\} + m\{\delta t^{TP*}\} + m\{\delta t^{\Gamma*}\} + m\{\delta t^{OP*}\} + m\{\Delta^{ИЗМ}\}; \\ \sigma_P^2\{\delta t^\Sigma\} &\approx \sigma^2\{\delta t^{\Phi\Pi*}\} + \sigma^2\{\delta t^{\Phi X*}\} + \sigma^2\{\delta t^{TP*}\} + \sigma^2\{\delta t^{\Gamma*}\} + \sigma^2\{\delta t^{OP*}\} + 9\sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\}. \end{aligned}$$

Соответственно для $m_\Sigma\{\delta t^\Sigma\}$ и $\sigma_\Sigma^2\{\delta t^\Sigma\}$ можно записать

$$\begin{aligned} m_\Sigma\{\delta t^\Sigma\} &\approx m\{\delta t^{\Phi\Pi*}\} + m\{\delta t^{\Phi X*}\} + m\{\delta t^{TP*}\} + m\{\delta t^{\Gamma*}\} + m\{\delta t^{OP*}\} + m\{\Delta^{ИЗМ}\}; \\ \sigma_\Sigma^2\{\delta t^\Sigma\} &\approx \sigma^2\{\delta t^{\Phi\Pi*}\} + \sigma^2\{\delta t^{\Phi X*}\} + \sigma^2\{\delta t^{TP*}\} + \sigma^2\{\delta t^{\Gamma*}\} + \sigma^2\{\delta t^{OP*}\} + \sigma^2\{\Delta^{ИЗМ}\}. \end{aligned}$$

5.3. Математические модели размерной нестабильности пленочных фотошаблонов и слоев МПП

Известно, что при изготовлении рабочих фотошаблонов, травлении тонких слоев, прессовании в результате деформации основы (усадки или уд-

линения) печатные элементы получают дополнительные смещения относительно своих номинальных положений. Эти смещения, как отмечено выше, представляют собой случайные величины.

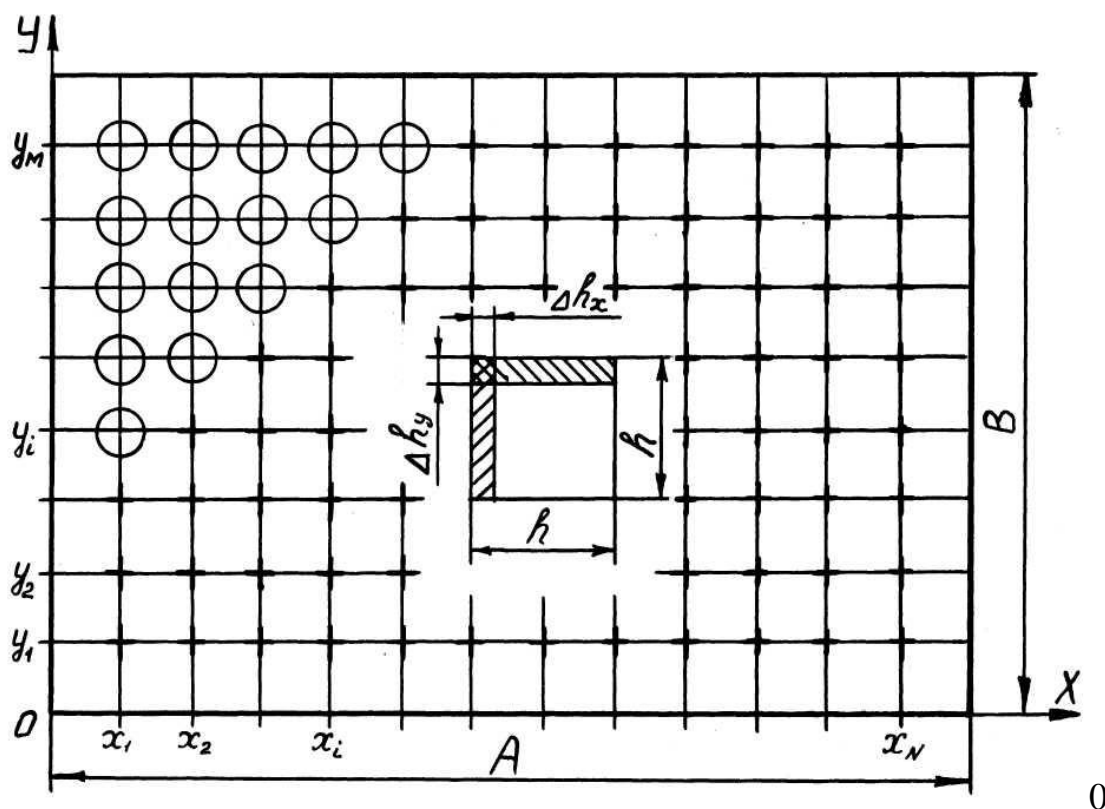


Рис. 5.8. Эскиз рабочего фотошаблона (слоя МПП):

XOY — прямоугольная система координат, h — шаг координатной сетки, x_i и y_i — координаты центра одной из контактных площадок (в шагах координатной сетки), $A \times B$ — габаритные размеры рисунка (в шагах координатной сетки), $\Delta h_x, \Delta h_y$ — деформация единичного участка в направлении осей X и Y соответственно

Получим аналитические выражения, позволяющие рассчитать числовые характеристики распределения погрешностей расположения печатных элементов в направлении осей X и Y (обозначим их как Δ_{DX} и Δ_{DY}).

Решим задачу для наиболее общего случая, а именно когда рисунок схемы состоит из расположенных в M строк и N столбцов изолированных контактных площадок, номинальные положения центров которых соответствуют узлам координатной сетки (рис. 5.8). Выделим единичный участок пленочного фотошаблона (или слоя МПП), габаритные размеры которого равны шагу координатной сетки. Деформацию такого участка, возникающую в результате химико-фотографической обработки (для пленочных фотошабло-

нов), травления (для отдельных слоев МПП), прессования (для спрессованных слоев), в направлении осей X и Y обозначим соответственно как Δh_x и Δh_y .

Ранее было отмечено, что отдельные участки равных размеров в пределах даже одного экземпляра пленочного фотошаблона (или слоя) деформируются не в одинаковой степени. Это обстоятельство позволяет рассматривать деформации $\Delta h_{x,y}$ как случайные величины, распределенные, например, по закону Гаусса с математическими ожиданиями $m_{0x,y}$ и дисперсиями $\sigma_{0x,y}^2$.

Деформация каждого из единичных участков, принадлежащих одной подложке конкретного фотошаблона или слоя, происходит под влиянием ряда общих факторов. Это позволяет предположить, что между величинами деформации таких участков существует нормальная линейная корреляционная зависимость. Введем обозначения:

$r_{x,y}$ — коэффициенты корреляции между величинами деформации соседних единичных участков в направлении осей X и Y соответственно;

$R\{\Delta_{dx,y}\}$ — коэффициент корреляции между величинами Δ_{dx} и Δ_{dy} .

Величины $r_{x,y}$ и $R\{\Delta_{dx,y}\}$ будем считать постоянными для конкретного материала подложки.

Очевидно, что для коэффициентов корреляции $r_{0x,y}$ справедливо соотношение

$$0 \leq r_{x,y} \leq 1,$$

в то время как значения $R\{\Delta_{dx,y}\}$ могут, по-видимому, в общем случае быть и отрицательными:

$$-1 \leq R\{\Delta_{dx,y}\} \leq 1.$$

Установим связь между числовыми характеристиками распределения величин Δh_x и Δ_{dx} , с одной стороны, и Δh_y и Δ_{dy} — с другой.

Ниже рассмотрим деформацию подложек только в направлении оси X . Все сказанное в равной мере может быть отнесено и к описанию деформации в направлении оси Y .

Выделим один из вертикальных рядов контактных площадок. В результате деформации образца центры этих площадок сместятся относительно узлов координатной сетки (рис. 5.9).

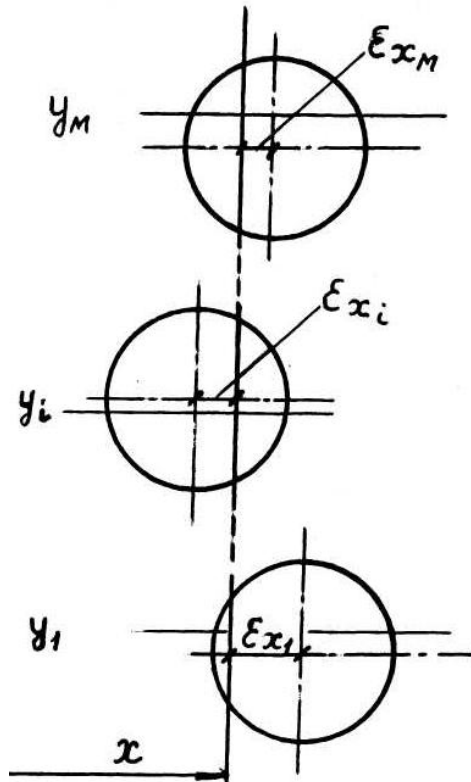


Рис. 5.9. Смещения центров контактных площадок

Смещения центров контактных площадок в направлении оси X обозначим как ε_x . Очевидно, что ε_x является случайной величиной. Так как величина ε_x может быть представлена как суммарная деформация X единичных участков, то ее распределение можно считать близким к нормальному.

Выражения для определения числовых характеристик распределения величины ε_x запишем как

$$m_{\varepsilon x} = m_{0x} X, \quad (5.4)$$

$$\sigma_{\varepsilon x}^2 = \sigma_{0x}^2 (X + 2r_x C_x^2), \quad (5.5)$$

где C_x^2 — число сочетаний из X по 2, рассчитываемое из выражения

$$C_x^2 = \frac{X(X-1)}{2!}.$$

Из соотношений (5.4) и (5.5) следует, что по мере удаления печатных элементов относительно выбранного начала координат (например, левого нижнего угла рисунка) математическое ожидание величины их смещения изменяется линейно, а дисперсия — параболически.

Графически эта зависимость показана на рис. 5.10. В правой части рисунка приведена суммарная кривая плотности вероятности распределения величины Δ_{DX} , аналитическая запись которой имеет вид

$$\varphi\{\Delta_{DX}\} = \frac{1}{A} \int_0^A \frac{1}{\sigma_{0x} \sqrt{2\pi X [1 + r_x (X-1)]}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\Delta_{DX} - m_{0x} X)^2}{2\sigma_{0x}^2 X [1 + r_x (X-1)]} \right\} dx.$$

Получим выражения для определения числовых характеристик распределения погрешности Δ_{DX} .

Величины $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ представим как наблюдаемые значения случайной величины X . Так как контактные площадки на рис. 5.8 расположены равномерно вдоль каждой из осей координат, распределение величины X в пределах от 0 до A можно считать по закону равной вероятности с плотностью вероятности

$$\varphi\{A\} = \frac{1}{A}. \quad (5.6)$$

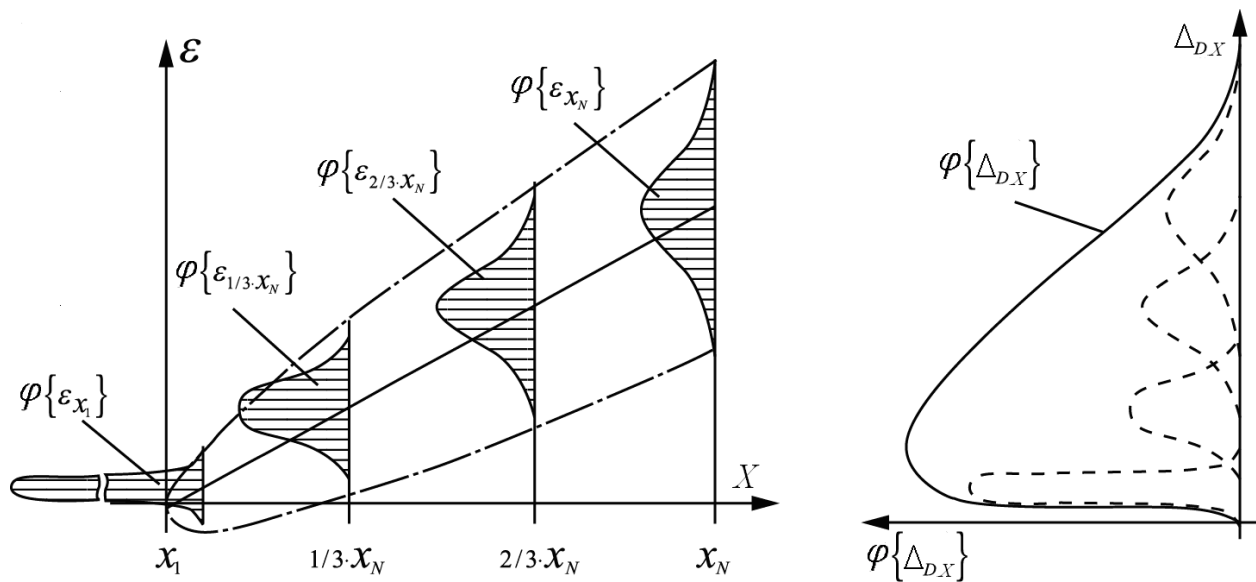


Рис. 5.10. Теоретическая точностная диаграмма размерной нестабильности пленочных фотошаблонов (или слоев МПП) в направлении оси X

В этом случае характеристики $m_{\varepsilon X}$ и $\sigma_{\varepsilon X}^2$ в формулах (5.4) и (5.5) будут представлять собой функции случайной величины X , в связи с чем для них могут быть рассчитаны соответствующие числовые характеристики. Получим выражения для определения этих числовых характеристик, которые понадобятся нам в дальнейшем. Используя известные формулы теории вероятностей, запишем

$$m\{m_{\varepsilon X}\} = m\{m_{0X}\} = m_{0X} \int_0^A \varphi\{x\} x \, dx = m_{0X} \frac{A}{2}, \quad (5.7)$$

$$\sigma^2\{m_{\varepsilon X}\} = \sigma^2\{m_{0X} \cdot X\} = m_{0X}^2 \cdot \sigma^2\{X\} = m_{0X}^2 \frac{A^2}{12}, \quad (5.8)$$

$$m\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \int_0^{\sigma_{\varepsilon A}} \varphi\{\sigma_{\varepsilon X}\} \cdot \sigma_{\varepsilon X} d\sigma_{\varepsilon X}, \quad (5.9)$$

$$\sigma^2\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \int_0^{\sigma_{\varepsilon A}} \varphi\{\sigma_{\varepsilon X}\} \cdot \sigma_{\varepsilon X}^2 d\sigma_{\varepsilon X} - m^2\{\sigma_{\varepsilon X}\}, \quad (5.10)$$

где $\varphi\{\sigma_{\varepsilon X}\}$ – плотность вероятности распределения $\sigma_{\varepsilon X}$;

$\sigma_{\varepsilon A}$ – среднее квадратическое отклонение величины ε_X при $x = A$.

Выражение для $\varphi\{\sigma_{\varepsilon X}\}$ найдем по формуле (2.3).

Из уравнения (5.4) находим

$$x_{1,2} = \frac{(r_X - 1)\sigma_{0X} \pm \sqrt{(r_X - 1)^2 \sigma_{0X}^2 + 4r_X \sigma_{\varepsilon X}^2}}{2r_X \sigma_{0X}} \quad (5.11)$$

при $r_X \neq 0$.

Дифференцируя выражение (5.10), находим

$$\frac{dx}{d\sigma_{\varepsilon X}} = \pm \frac{2\sigma_{\varepsilon X}}{\sigma_{0X} \sqrt{(r_X - 1)^2 \sigma_{0X}^2 + 4r_X \sigma_{\varepsilon X}^2}} \quad (5.12)$$

при $r_X \neq 0$.

Подставляя выражения (5.5) и (5.11) в формулу (2.3), получим

$$\varphi\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \frac{2\sigma_{\varepsilon X}}{A\sigma_{0X} \sqrt{(r_X - 1)^2 \sigma_{0X}^2 + 4r_X \sigma_{\varepsilon X}^2}} \quad (5.13)$$

при $r_X \neq 0$.

Введем обозначение

$$\mu = \frac{\sigma_{\varepsilon A}}{\sigma_{0X}}. \quad (5.14)$$

Вычисляя интеграл (5.9) по формуле [7, формула (202.1)] с учетом (5.13) и (5.14), находим

$$m\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \frac{\sigma_{0X}\mu}{4Ar_X} \sqrt{(r_X - 1)^2 + 4r_X \mu^2} - \frac{\sigma_{0X}(r_X - 1)^2}{8Ar_X^{3/2}} \ln \left| \frac{2\sqrt{r_X} \mu + \sqrt{(r_X - 1)^2 + 4r_X \mu^2}}{r_X - 1} \right| \quad (5.15)$$

при $r_X > 0$

ИЛИ

$$m\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \frac{\sigma_{0X}\mu}{4Ar_X} \sqrt{(r_X - 1)^2 + 4r_X\mu^2} - Arsh \left[\frac{2\mu\sqrt{r_X}}{r_X - 1} \right] \quad \text{при } r_X > 0,$$

где $Arsh[\dots]$ – обратный гиперболический синус.

Вычисляя интеграл в выражении (5.10) по формуле [7, формула (203.1)] с учетом равенств (5.13) и (5.14), находим

$$\sigma^2\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \frac{\sigma_{0X}^2 \{(r_X - 1)^3 - \sqrt{(r_X - 1)^2 + 4r_X\mu^2} [r_X^2 - 2r_X(\mu^2 + 1) + 1]\}}{12Ar_X} - m^2\{\sigma_{\varepsilon X}\} \quad (5.16)$$

при $r_X \neq 0$.

Дисперсия и математическое ожидание суммарного распределения, получаемого из закона Гаусса при числовых характеристиках, представляющих собой функции какого-либо доминирующего фактора, рассчитываются по формуле (3.1)

$$\sigma^2\{\Delta_{DX}\} \approx m^2\{\sigma_{\varepsilon X}\} + \sigma^2\{m_{\varepsilon X}\} + \sigma^2\{\sigma_{\varepsilon X}\}, \quad m\{\Delta_{DX}\} = m\{m_{\varepsilon X}\}. \quad (5.17)$$

Подставляя в уравнение (5.17) значения слагаемых из формул (5.8), (5.15), (5.16) и учитывая соотношения (5.5), (5.14), окончательно получим

$$\begin{aligned} \sigma^2\{\Delta_{DX}\} \approx & \frac{m_{0X}^2 A}{12} + \\ & + \frac{\sigma_{0X}^2 \{(r_X - 1)^3 - [r_X^2 - 2r_X(A[1 + r_X(A - 1)] + 1) + 1]\sqrt{(r_X - 1)^2 + 4r_X A[1 + r_X(A - 1)]}\}}{12Ar_X^2} \end{aligned} \quad \text{при } r_X \neq 0. \quad (5.18)$$

Математическое ожидание величины Δ_{DX} равно

$$m\{\Delta_{DX}\} = m_{0X} \cdot \frac{A}{2}. \quad (5.19)$$

В частном случае при $r_X = 1$ выражения (5.5), (5.13), (5.15), (5.16) и (5.18) принимают более простой вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\varepsilon X}^2 &= \sigma_{0X}^2 X^2; \quad \varphi\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \frac{1}{\sigma_{0X} \cdot A}; \quad m\{\sigma_{\varepsilon X}\} = \frac{\sigma_{0X} A}{2}; \\ \sigma^2\{\sigma_{\varepsilon X}\} &= \frac{\sigma_{0X}^2 A}{12}; \quad \sigma^2\{\Delta_{DX}\} = \frac{m_{0X}^2 A}{12} + \frac{\sigma_{0X}^2 A^2}{3}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Выражения для определения числовых характеристик распределения погрешности Δ_{DY} будут иметь вид, аналогичный (5.18) и (5.19):

$$\sigma^2\{\Delta_{DY}\} \approx \frac{m_{0Y}^2 B}{12} + \frac{\sigma_{0Y}^2 \{(r_Y - 1)^3 - [r_Y^2 - 2r_Y(B[1 + r_Y \cdot (B - 1)] + 1) + 1] \sqrt{(r_Y - 1)^2 + 4r_Y B[1 + r_Y(B - 1)]}\}}{12Br_Y^2}$$

при $r_Y \neq 0$. (5.21)

$$m\{\Delta_{DY}\} = m_{0Y} \cdot \frac{B}{2}. \quad (5.22)$$

Следует заметить, что применение формул (5.18) и (5.21) возможно только при таких сочетаниях параметров $\sigma_{0X,Y}^2$, $r_{X,Y}$, A и B , при которых величины $\varphi\{\sigma_{\varepsilon X,Y}\}$, $m\{\sigma_{\varepsilon X,Y}\}$ и $\sigma^2\{\sigma_{\varepsilon X,Y}\}$, определяемые соответственно из выражений (5.13), (5.15) и (5.16), не будут отрицательными.

При выводе формул (5.18), (5.19), (5.21) и (5.20) ничего не говорилось о величине шага координатной сетки. В общем случае она может быть равна 1,25 и 2,5 мм, а также любой другой величине. Рассмотрим, как будут изменяться значения параметров $m_{0X,Y}$, $\sigma_{0X,Y}^2$ и $r_{X,Y}$ при изменении величины шага координатной сетки.

Допустим, что мы имеем комплект пленочных фотошаблонов (или слоев МПП) с двумя координатными сетками: одна - с шагом h' , другая - с шагом h'' , причем

$$\frac{h'}{h''} = n,$$

где n – целое число.

Пусть размерная нестабильность фотошаблонов (или слоев) характеризуется следующими параметрами:

- а) для шага $h' - m'_{0X,Y}, (\sigma'_{0X,Y})^2, r'_{X,Y}$;
- б) для шага $h'' - m''_{0X,Y}, (\sigma''_{0X,Y})^2, r''_{X,Y}$.

Используя эти обозначения, запишем на основании формул (5.4) и (5.5) выражения для числовых характеристик деформации некоторого участка длиной L :

$$\left. \begin{aligned} m_L &= m'_{0X,Y} \frac{L}{h'}, \\ m_L &= m''_{0X,Y} \frac{L}{h''}, \\ \sigma_L^2 &= (\sigma'_{0X,Y})^2 \cdot \left(\frac{L}{h'} + 2r'_{X,Y} \cdot C_{L/h'}^2 \right), \\ \sigma_L^2 &= (\sigma''_{0X,Y})^2 \cdot \left(\frac{L}{h''} + 2r''_{X,Y} \cdot C_{L/h''}^2 \right), \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

где m_L и σ_L^2 – соответственно математическое ожидание и дисперсия участка длиной L ;

$C_{L/h'}^2$ – число сочетаний из L/h' по 2;

$C_{L/h''}^2$ – число сочетаний из L/h'' по 2.

Из выражений (5.23) получаем следующие соотношения для пересчета параметров $m_{0X,Y}$, $\sigma_{0X,Y}^2$ и $r_{X,Y}$ в случае изменения шага координатной сетки:

$$\begin{aligned} m'_{0X,Y} &= nm''_{0X,Y}, \\ (\sigma'_{0X,Y})^2 &= (\sigma''_{0X,Y})^2 (n + 2r''_{X,Y} C_n^2), \\ r'_{X,Y} &= \frac{r''_{X,Y} n}{1 + r''_{X,Y} (n - 1)}, \end{aligned}$$

где C_n^2 – число сочетаний из n по 2, определяемое как

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}.$$

На рис. 5.11...5.13 приведены графические изображения математических моделей размерной нестабильности некоторых типов фотопленок и фольгированных диэлектриков с параметрами, определенными экспериментально.

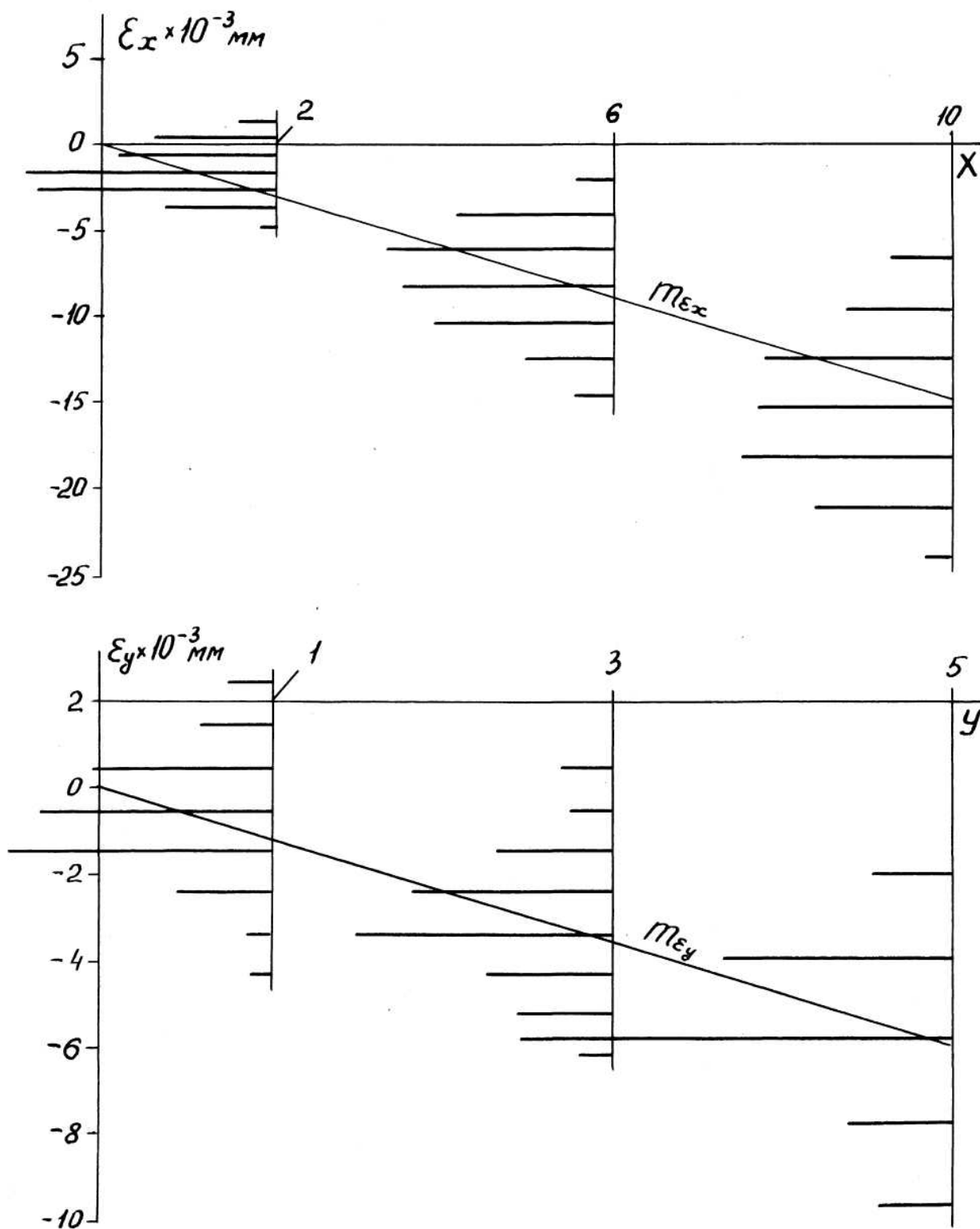


Рис. 5.11. Графические изображения и параметры математических моделей погрешностей $\Delta_{DXY}^{\Phi III(V)}$ для фотопленки FO - 175 (Япония):

$N = 360$; размер единичного участка $10 \times 10 \text{ мм}$; $m_{0X} = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$;

$\sigma_{0X}^2 = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ мм}^2$; $r_X = 0,75$; $m_{0Y} = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$; $\sigma_{0Y}^2 = 3,3 \cdot 10^{-7} \text{ мм}^2$; $r_Y = 0,17$

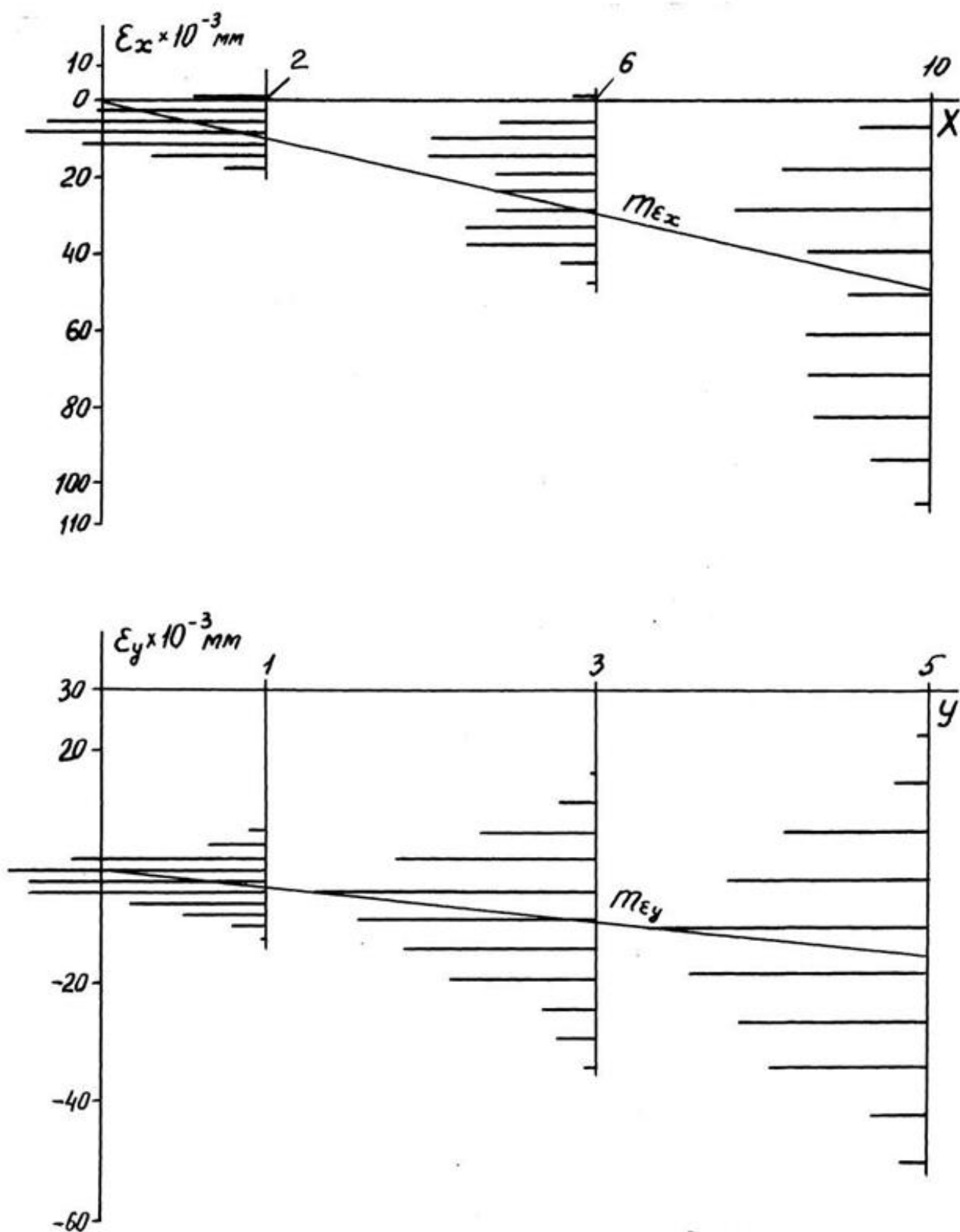


Рис. 5.12. Графические изображения и параметры математических моделей погрешностей $\Delta_{DX,Y}^{TP}$ для фольгированного диэлектрика толщиной 0,1 мм:

$N = 1440$; размер единичного участка 10×10 мм; $m_{0X} = -4,5 \cdot 10^{-3}$ мм;
 $\sigma_{0X}^2 = 9,2 \cdot 10^{-6}$ мм²; $r_X = 0,59$; $m_{0Y} = -3,0 \cdot 10^{-3}$ мм; $\sigma_{0Y}^2 = 1,4 \cdot 10^{-6}$ мм²; $r_Y = 0,53$

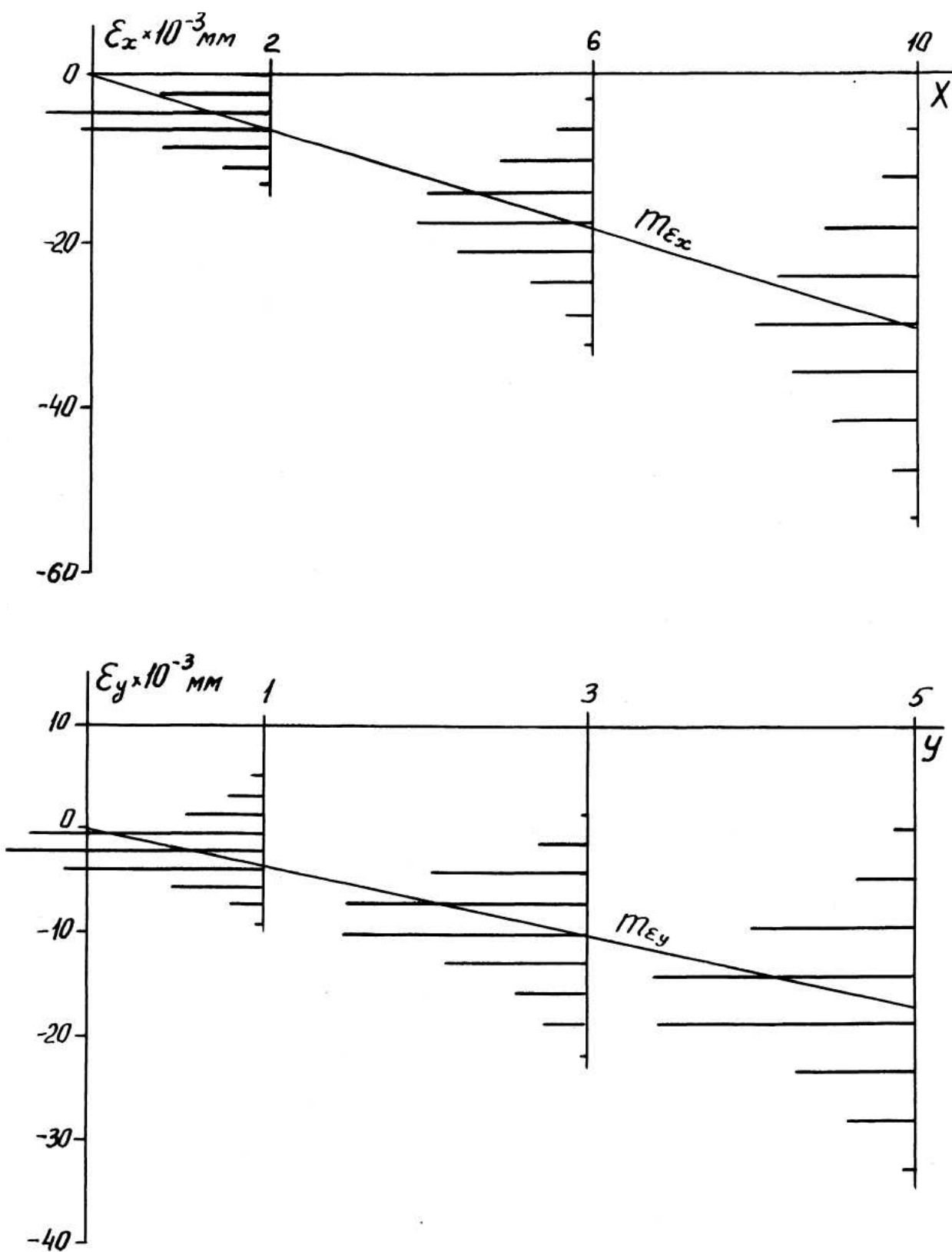


Рис. 5.13. Графические изображения и параметры математических моделей погрешностей $\Delta_{DX,Y}^{TP}$ для фольгированного диэлектрика толщиной 0,2 мм:

$N = 1440$; размер единичного участка 10×10 мм; $m_{0X} = -3,1 \cdot 10^{-3}$ мм;
 $\sigma_{0X}^2 = 1,4 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2$; $r_X = 0,68$; $m_{0Y} = -3,6 \cdot 10^{-3}$ мм; $\sigma_{0Y}^2 = 3,1 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2$; $r_Y = 0,53$

Установим приближенные соотношения между числовыми характеристиками размерной неустойчивости, рассчитываемыми по формулам (5.18), (5.19), (5.21), (5.22), с одной стороны, и коэффициентом относительной деформации, приводимом в ТУ на материал, – с другой.

Введем следующие обозначения:

k_{TV}^{MAX} – максимальное значение коэффициента относительной деформации, приводимое в ТУ на материал;

ε_X^{MAX} – максимальное смещение координаты печатного элемента при фиксированном значении X ;

l – размер единичного участка.

Параметр X , как и ранее, рассматриваем как безразмерную величину.

Вновь рассмотрим сначала деформацию в направлении оси X а затем распространим все сказанное для описания деформации в направлении оси Y .

Аппроксимируем графические изображения моделей, приведенных на рис. 5.11...5.13 упрощенной точностной диаграммой (рис. 5.14).

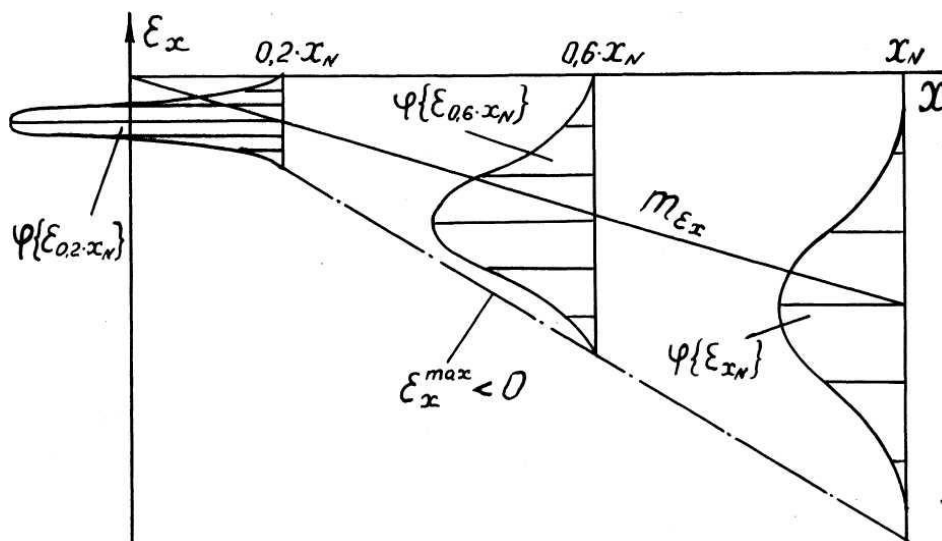


Рис. 5.14. Упрощенная точностная диаграмма размерной неустойчивости пленочных фотошаблонов (слоев МПП)

Эта модель представляет собой частный случай рассмотренной ранее математической модели с параметрами

$$m_{\varepsilon X} = m_{0X} X, \quad (5.24)$$

$$r_X = 1, \sigma_{\varepsilon X}^2 = \sigma_{0X}^2 X, \\ \varepsilon_X^{MAX} = k_{TV}^{MAX} Xl. \quad (5.25)$$

Распределение погрешности ε_X примем по закону (2.2). Тогда

$$m_{\varepsilon X} \approx \frac{k_{TV}^{MAX} Xl}{2}, \quad (5.26)$$

$$\sigma_{\varepsilon X}^2 \approx \left(\frac{k_{TV}^{MAX} Xl}{6} \right)^2. \quad (5.27)$$

Из выражений (5.24...5.27) находим

$$m_{0X} \approx \frac{k_{TV}^{MAX} l}{2}, \quad (5.28)$$

$$\sigma_{0X}^2 \approx \left(\frac{k_{TV}^{MAX} l}{6} \right)^2. \quad (5.29)$$

Формулы для приближенного определения числовых характеристик распределения погрешности Δ_{DX} получим, подставляя равенства (5.28) и (5.29) в соотношения (5.19) и (5.20):

$$m\{\Delta_{DX}\} \approx \frac{k_{TV}^{MAX} Al}{4} = \frac{k_{TV}^{MAX} A_L}{4}, \quad (5.30)$$

$$\sigma^2\{\Delta_{DX}\} \approx \frac{13(k_{TV}^{MAX} Al)^2}{432} = \frac{13(k_{TV}^{MAX} A_L)^2}{432}. \quad (5.31)$$

Аналогичным образом запишем выражения для приближенного определения числовых характеристик распределения погрешности Δ_{DY}

$$m\{\Delta_{DY}\} \approx \frac{k_{TV}^{MAX} Bl}{4} = \frac{k_{TV}^{MAX} B_L}{4} \quad (5.32)$$

$$\sigma^2\{\Delta_{DY}\} \approx \frac{13(k_{TV}^{MAX} Bl)^2}{432} = \frac{13(k_{TV}^{MAX} B_L)^2}{432}. \quad (5.33)$$

В формулах (5.30... 5.33) параметрами A_L и B_L обозначены габаритные размеры рисунка в линейных единицах.

5.4. Математическая модель распределения минимального пояска контактных площадок

Введем обозначение

$$S = \frac{D}{2} - \frac{d}{2}$$

и перепишем выражение (5.1) следующим образом:

$$b = S - \Delta_{\Sigma}.$$

Поскольку параметры D и d можно рассматривать как случайные величины с распределениями, близкими к закону Гаусса, то их разность S будет иметь то же распределение с дифференциальной функцией

$$\varphi\{s\} = \frac{1}{\sigma\{S\}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(w - m\{S\})^2}{2\sigma^2\{S\}}\right], \quad (5.34)$$

где $m\{S\}$ и $\sigma^2\{S\}$ – соответственно математическое ожидание и дисперсия величины w , определяемые как

$$\left. \begin{aligned} m\{S\} &= 0,5(m\{D\} - m\{d\}), \\ \sigma^2\{S\} &= 0,25(\sigma^2\{D\} + \sigma^2\{d\}) = 0,25(\sigma^2\{\delta D^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\delta d^{\Sigma}\}). \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Распределение параметра Δ_{Σ} примем по закону Максвелла (2.6) с плотностью вероятности

$$\begin{aligned} \varphi\{\Delta_{\Sigma}\} &= \frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho_{\Sigma}^2)} \cdot \sigma\{\Delta_{\Sigma X}\} \cdot \sigma\{\Delta_{\Sigma Y}\}} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\Sigma}^2)} \left[-\frac{(\Delta_{\Sigma} \cos \theta - m\{\Delta_{\Sigma X}\})^2}{\sigma^2\{\Delta_{\Sigma X}\}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\rho_{\Sigma}(\Delta_{\Sigma} \cos \theta - m\{\Delta_{\Sigma X}\})(\Delta_{\Sigma} \sin \theta - m\{\Delta_{\Sigma Y}\})}{\sigma\{\Delta_{\Sigma X}\} \cdot \sigma\{\Delta_{\Sigma Y}\}} + \frac{(\Delta_{\Sigma} \sin \theta - m\{\Delta_{\Sigma Y}\})^2}{\sigma^2\{\Delta_{\Sigma Y}\}} \right] \right\} d\theta, \quad (5.36) \\ &\quad (0 \leq \Delta_{\Sigma} \leq \infty) \end{aligned}$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{\Sigma X, Y} &= \Delta_{dX, Y}^{\Sigma} - \Delta_{DX, Y}^{\Sigma}, \\ m\{\Delta_{\Sigma X, Y}\} &= m\{\Delta_{dX, Y}^{\Sigma}\} - m\{\Delta_{DX, Y}^{\Sigma}\}, \\ \sigma^2\{\Delta_{\Sigma X, Y}\} &= \sigma^2\{\Delta_{dX, Y}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX, Y}^{\Sigma}\}. \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

ρ_{Σ} – коэффициент корреляции между погрешностями $\Delta_{\Sigma X}$ и $\Delta_{\Sigma Y}$.

Дифференциальный закон распределения параметра b представляет собой композицию закона Гаусса (5.34) и эллиптического распределения (5.36) и может быть записан в общем виде как

$$\varphi\{b\} = \varphi\{s\} * \varphi\{\Delta_{\Sigma}\} = \int_0^{\infty} \varphi\{b + \Delta_{\Sigma}\} \varphi\{\Delta_{\Sigma}\} d\Delta_{\Sigma}, \quad (5.38)$$

Подставляя выражения (5.34) и (5.36) в формулу (5.38) и учитывая при этом соотношения (5.35) и (5.37), получим

$$\begin{aligned} \varphi\{b\} = & \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{0,25(1-\rho_{\Sigma}^2)(\sigma^2\{D\} + \sigma^2\{d\})(\sigma^2\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\})(\sigma^2\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\})}} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \Delta_{\Sigma} \cdot \exp\left\{-\frac{[b + \Delta_{\Sigma} - 0,5(m\{D\} - m\{d\})]^2}{0,5(\sigma^2\{D\} + \sigma^2\{d\})}\right\} \times \\ & \times \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{\Sigma}^2)} \left[\frac{(\Delta_{\Sigma} \cos\theta - m\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + m\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\})^2}{\sigma^2\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\}} - \right. \right. \\ & - \frac{2\rho_{\Sigma}(\Delta_{\Sigma} \cos\theta - m\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + m\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\})(\Delta_{\Sigma} \sin\theta - m\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + m\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\})}{\sqrt{(\sigma^2\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\})(\sigma^2\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\})}} + \\ & \left. \left. + \frac{(\Delta_{\Sigma} \sin\theta - m\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + m\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\})^2}{\sigma^2\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\}} \right] \right\} d\theta d\Delta_{\Sigma}. \quad (5.39) \end{aligned}$$

Внешний вид кривой распределения (5.39) приведен на рис. 5.15.

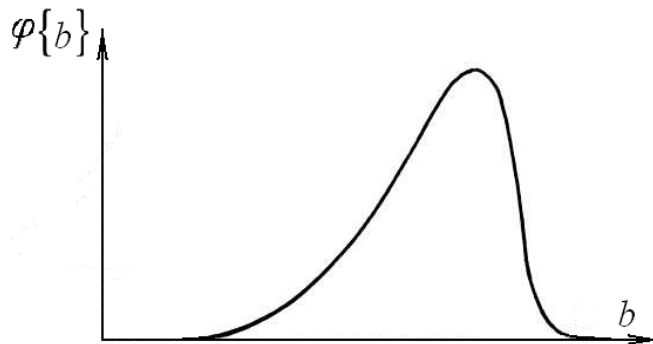


Рис. 5.15. Плотность вероятности распределения параметра b

Установим взаимосвязь между суммарным коэффициентом корреляции ρ_{Σ} и коэффициентами корреляции проекций одноименных погрешностей расположения печатных элементов и монтажных отверстий.

Рассмотрим технологический процесс, содержащий N операций, для которых существует линейная и нормальная корреляционная зависимости между проекциями погрешностей расположения элементов на оси X и Y .

Введем обозначения:

X_q и Y_q – проекции погрешностей расположения элементов на оси X и Y на q -й операции; $\sigma^2\{X_q\}$ и $\sigma^2\{Y_q\}$ – дисперсии величин X_q и Y_q ; ρ_q – коэффициент корреляции между величинами X_q и Y_q ; X_Σ и Y_Σ – проекции суммарных погрешностей расположения элементов на оси X и Y , причем

$$X_\Sigma = \sum_{q=1}^N X_q ; \quad Y_\Sigma = \sum_{q=1}^N Y_q.$$

Величины $\sigma^2\{X_q\}$, $\sigma^2\{Y_q\}$ и ρ_q в соответствии с выражениями (3.2) и (3.3) запишем в виде

$$\sigma^2\{X_q\} = \sigma^2\{Z_q\} + \sigma^2\{S_q\}, \quad \sigma^2\{Y_q\} = \sigma^2\{Z_q\} + \sigma^2\{Q_q\}, \quad \rho_q = \frac{\sigma^2\{Z_q\}}{\sigma\{X_q\} \cdot \sigma\{Y_q\}}.$$

Считая операционные погрешности независимыми между собой, а также предполагая распределения величин X_q и Y_q несущественно отличающимися от нормального, получим

$$\sigma^2\{X_\Sigma\} = \sum_{q=1}^N \sigma^2\{Z_q\} + \sum_{q=1}^N \sigma^2\{S_q\}, \quad \sigma^2\{Y_\Sigma\} = \sum_{q=1}^N \sigma^2\{Z_q\} + \sum_{q=1}^N \sigma^2\{Q_q\}, \quad \rho_\Sigma = \frac{\sum_{q=1}^N \sigma^2\{Z_q\}}{\sigma\{X_\Sigma\} \cdot \sigma\{Y_\Sigma\}}.$$

Выражение для ρ_Σ как функции дисперсий и коэффициентов корреляции отдельных операций примет вид

$$\rho_\Sigma = \frac{\sum_{q=1}^N (\rho_q \cdot \sigma\{X_q\} \cdot \sigma\{Y_q\})}{\sqrt{\sum_{q=1}^N \sigma^2\{X_q\} \cdot \sum_{q=1}^N \sigma^2\{Y_q\}}}.$$

Полученные соотношения могут быть использованы в конструкторских и технологических расчетах оптимальных параметров МПП, операционных и суммарных погрешностей и т.д. Примеры таких расчетов приведены ниже.

5.5. Конструкторские и технологические расчеты с применением теоретико-вероятностных математических моделей

5.5.1. Определение оптимальных размеров контактных площадок

Базовым выражением для определения оптимальных размеров контактных площадок, окружающих монтажные отверстия в МПП, является соотношение

$$P\{b \geq b_{MIN}\} = 1 - \int_0^{b_{MIN}} \varphi\{b\}db, \quad (5.40)$$

где b_{MIN} – минимально допустимое значение параметра b ; $\varphi\{b\}$ – функция, определяемая равенством (5.39).

Выражение (5.40) устанавливает взаимосвязь между вероятностью получения контактных площадок с минимальной шириной пояска не менее заданной величины b_{MIN} , с одной стороны, и полуразностью математических ожиданий размеров контактных площадок и монтажных отверстий, а также числовыми характеристиками распределения суммарных погрешностей размеров и расположения печатных элементов и монтажных отверстий – с другой стороны.

Принимая в качестве расчетного параметр $m\{D\}$, а также вводя обозначение

$$C = m\{D\} - m\{d\} - 2b_{MIN},$$

получим выражение, пригодное для инженерных расчетов оптимальных размеров контактных площадок:

$$m\{D\} = m\{d\} + 2b_{MIN} + C. \quad (5.41)$$

Коэффициент C в выражении (5.41) учитывает суммарное влияние погрешностей размеров и расположения печатных элементов и монтажных отверстий на распределение величины b .

В табл. 5.3 приведены значения коэффициента C , рассчитанные при $P\{b \geq b_{MIN}\} \geq 0,9999$; $\rho_{\Sigma} \leq 0,4$ и различных значениях параметров:

$$m = |m\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} - m\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\}| = |m\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} - m\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\}|, \sigma^2 = \sigma^2\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\} = \sigma^2\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\}. \quad (5.42)$$

При несоблюдении равенств (5.42) параметры m и σ^2 могут быть рассчитаны приближенно как

$$m \approx \sqrt{|m\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} - m\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\}| \cdot |m\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} - m\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\}|}, \quad (5.43)$$

$$\sigma^2 \approx \sqrt{(\sigma^2\{\Delta_{dX}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DX}^{\Sigma}\}) (\sigma^2\{\Delta_{dY}^{\Sigma}\} + \sigma^2\{\Delta_{DY}^{\Sigma}\})}. \quad (5.44)$$

Таблица 5.3

$\sigma^2 \cdot 10^{-3}, \text{ мм}^2$	$m \cdot 10^{-2}, \text{ мм}$			
	1	4	10	20
1	0,320	0,405	0,575	0,860
	0,325	0,410	0,585	0,870
2,5	0,475	0,560	0,730	1,015
	0,490	0,575	0,745	1,030
7,5	0,785	0,870	1,040	1,325
	0,805	0,890	1,060	1,345
15	1,085	1,170	1,340	1,625
	1,105	1,190	1,360	1,645

Примечания :

1. Значения коэффициента C рассчитаны в мм при $P = 0,9999$, после чего округлены в сторону увеличения до ближайшего целого, кратного 0,005 мм.
2. Для суммы $\sigma^2\{D\} + \sigma^2\{d\}$, равной $0,8 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2$, значения C приведены в числителе, а равной $3,2 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2$, — в знаменателе.
3. При определении по таблице промежуточных значений коэффициента C (интерполяции) следует иметь в виду, что значения C приблизительно прямо пропорциональны величинам m и σ .

Соотношение (5.41) и данные табл. 5.3 позволяют рассчитать средние значения (математические ожидания) размеров контактных площадок, окру-

жающих монтажные отверстия, с вероятностью соблюдения неравенства $b \geq b_{MIN}$ не ниже, чем 0,9999.

Если поля допусков на размеры печатных элементов симметричны относительно их номинальных размеров ($D_{НОМ}$), то выражение (5.41) может быть записано в виде

$$D_{НОМ} = m\{D\} + 2b_{MIN} + C.$$

Пример. Рассчитать параметр $m\{D\}$ при следующих исходных данных:

$$m\{d\} = 0,8 \text{ мм}; \sigma^2\{d\} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2; \sigma^2\{D\} = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2; b = 0,10 \text{ мм};$$

$$m = 1 \cdot 10^{-3} \text{ мм}; \sigma^2 = 2,7 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^2.$$

Из табл. 5.3 методом интерполяции находим $C = 0,5$ мм, далее

$$m\{D\} = 0,8 + 2 \cdot 0,1 + 0,5 = 1,5 \text{ мм}.$$

Близкий результат может быть получен и по формуле, приводимой в ГОСТ 23751-86 [2]:

$$D = (d + \Delta d_{BO}) + 2b + \Delta t_{BO} + 2\Delta d_{TP} + (T_d^2 + T_D^2 + \Delta t_{ПО}^2)^{1/2}.$$

Однако в последнем случае суммирование случайных погрешностей (допусков) осуществляется комбинацией методов максимума-минимума и вероятностного (без учета форм кривых распределения и вероятности попадания – в интервалы, ограниченные допусками), что методически вряд ли можно считать обоснованным. Кроме того, отсутствие в стандартах связей между операционными и суммарными погрешностями параметров МПП затрудняет решение соответствующих технологических задач.

5.5.2. Определение необходимой точности сверлильного станка

На специализированном сверлильном станке с ЧПУ (координатная точность по паспорту $+0,05$ мм) получено эмпирическое распределение (рис. 5.6, в и табл. 5.4).

Таблица 5.4

Средины интервалов, мкм						N
-25	-15	-5	5	15	25	
n_i						
Экспериментальное распределение						
5	14	43	50	30	12	154
Нормальное распределение						
3	17	42	52	31	9	154
Распределение (2.2)						
3	18	42	48	32	11	154
$m\{\Delta_{dx}^C\} = 3 \text{ мкм}; \quad \sigma\{\Delta_{dx}^C\} = 12 \text{ мкм}; \quad \chi^2_{\Gamma} = 1,18; \quad \chi^2_{2,2} = 0,51$						

Требуется ответить на вопрос: пригоден ли этот станок для изготовления МПП второго класса по ГОСТ 23751-86 [2], максимальный размер которых не превышает 180 мм и которые содержат 1000 отверстий? Соотношение квадратов предельных значений погрешностей $|\lim \Delta_{dx}^B|^2$ и $|\lim \Delta_{dx}^C|^2$ принять соответственно как 40 и 60%. Предельное значение суммарной погрешности определить как

$$\lim \Delta_{dx}^{\Sigma} = \sqrt{|\lim \Delta_{dx}^B|^2 + |\lim \Delta_{dx}^C|^2}.$$

Из [2, табл. 4] находим $T_d = 0,15$ мм. Перевод диаметрального позиционного допуска в координатный осуществляем по методике стандарта СТ СЭВ 1314-78

$$\lim \Delta_{dx}^{\Sigma} = \frac{T_d}{2,8} = \frac{0,15}{2,8} = 0,054 \text{ мм.}$$

Тогда

$$\lim \Delta_{dx}^C = \sqrt{(0,054)^2 \cdot 60\%} = 0,042 \text{ мм.}$$

Если в качестве математической модели погрешности Δ_{dx}^C выбрать закон Гаусса, то вероятность изготовления МПП, содержащей одно отверстие,

будет равна площади кривой плотности распределения, ограниченной пределами $(0 \pm 0,042)$ мм (рис. 5.16, *а*).

Численное значение этой площади определится так:

$$P_1 = \Phi\left(\frac{0,042 + 0,003}{0,012}\right) + \Phi\left(\frac{0,042 - 0,003}{0,012}\right) = 0,49991 + 0,49942 = 0,99933;$$

где $\Phi(\dots)$ – интеграл Лапласа.

Вероятность изготовления МПП, содержащей 1000 отверстий, равна

$$P_{1000} = (P_1)^{1000} = 0,5116.$$

Следовательно, предполагается, что каждая вторая плата окажется браком и такой станок вряд ли целесообразно использовать.

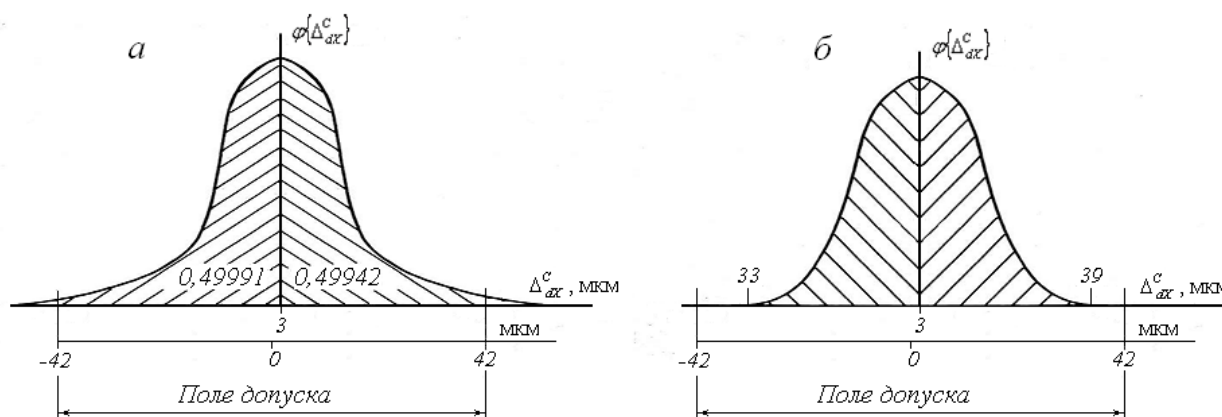


Рис. 5. 6. Взаимное расположение поля допуска и кривых распределения:
а – закона Гаусса; *б* – распределения (2.2)

Если же распределение погрешности Δ_{ax}^c принять по закону (2.2), то по расчетам ожидается 100%-ный выход годных плат (рис. 5.16, *б*), т.е. станок может быть использован.

В обоих случаях истинность результирующих высказываний не может считаться 100%-ной, поскольку основана она на расчетах по математической модели, которая, в свою очередь, не может описывать объект абсолютно точно. Тем не менее, как показывает практика, распределение (2.2) в подобных случаях в большей степени соответствует эксперименту.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ15895-77. Статистические методы управления качеством продукции. Термины и определения. Введ. 1978-01-01. М.: Изд-во стандартов, 1991. VIII , 37 с.
2. ГОСТ 23751-86. Платы печатные. Основные параметры конструкции. Введ. 1987-07-01. М.: Изд-во стандартов, 1986. VII , 14 с.
3. ГОСТ 23752-79. Платы печатные. Общие технические условия. Введ. 1980-07-01. М.: Изд-во стандартов, 1991. VI , 34 с.
4. ГОСТ Р 50779.10 – 2000. Вероятность и основы статистики. Термины и определения. Введ. 2001-07-01. М.: Изд-во стандартов, 2005. VI , 41 с.
5. 50-601-20-91. Рекомендации по оценке точности и стабильности технологических процессов (оборудования). М.: ВНИИС, 1991. Режим доступа: <http://vsesnip.com>.
6. Глудкин О. П. Анализ и контроль технологических процессов производства РЭА / О. П. Глудкин, В. Н. Черняев. М.: Радио и связь, 1983. 296 с.
7. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. М.: Наука, 1977. 228 с.
8. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин / А.Н. Зайдель. Л.: Наука, 1974. 108 с.
9. Иевлев В.И. Вероятностные методы в конструировании и производстве многослойных печатных плат : учеб. пособие / В.И. Иевлев. Свердловск: УПИ, 1989. 60 с.
10. Львович Я. Е. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности РЭА : учеб. пособие для вузов / Я. Е. Львович, В. Н. Фролов. М.: Радио и связь, 1986. 192 с.
11. Машиностроение. Энциклопедия : в 40 т. / ред. совет: К.В. Фролов (пред.) и др. М.: Машиностроение, 2000 – . Т. III-3. Технология изготовления деталей машин / А.М. Дальский [и др.]; под ред. А.Г. Суслова, 2000. 840 с.

12. Медведев А.М. Печатные платы. Конструкции и материалы / А.М. Медведев. М.: Техносфера, 2005. 304 с.
13. Точность производства в машиностроении и приборостроении / Н.А. Бородачев [и др.]; под ред. А.Н. Гаврилова. М.: Машиностроение, 1973. 567 с.
14. Ушаков Н.Н. Технология производства ЭВМ : учебник для вузов по специальности «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети» / Н.Н. Ушаков. М.: Высш. шк., 1991. 416 с.
15. Яншин А.А. Теоретические основы конструирования, технологии и надежности ЭВА : учеб. пособие для вузов / А.А. Яншин. М.: Радио и связь, 1983. 312 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Стандартные термины и определения

1. Статистические методы управления качеством продукции [1]

Единица продукции – отдельный экземпляр штучной продукции или определенное в установленном порядке количество нештучной или штучной продукции.

Примечание. Продукция может быть завершенной или незавершенной, находящейся в процессе изготовления, добывания, ремонта, эксплуатации, транспортирования, хранения.

Изделие – единица промышленной продукции, количество которой может исчисляться в штуках (экземплярах).

Примечание. К изделиям допускается относить завершенные и незавершенные предметы производства, в том числе заготовки.

Контролируемая партия продукции – совокупность единиц продукции одного наименования, типоминнала или типоразмера и исполнения, произведенная в течение определенного интервала времени в одних и тех же условиях и одновременно представленная для контроля.

Выборка – единицы продукции (наблюдаемые значения), отобранные из контролируемой партии для контроля и принятия решения о соответствии установленным требованиям.

Случайная выборка – выборка, в которой для любых единиц продукции (наблюдаемых значений) контролируемой партии обеспечена одинаковая вероятность их отбора.

Выборочный контроль – контроль, при котором решение о контролируемой совокупности или процессе принимают по результатам проверки одной или нескольких выборок.

Статистический контроль качества – контроль качества, при котором используются статистические методы.

Контроль по количественному признаку – контроль качества продукции, в ходе которого определяют значения параметра, а последующее решение о контролируемой совокупности или процессе принимают в зависимости от сравнения их с контрольным нормативом.

Контроль по качественному признаку – контроль качества продукции, в ходе которого каждую проверенную ее единицу относят к определенной группе, а последующее решение о контролируемой совокупности или процессе принимают в зависимости от соотношения чисел ее единиц, оказавшихся в разных группах.

Погрешность производства продукции – отклонение действительного значения параметра производимой продукции от его номинального значения, установленного нормативно-технической документацией.

Случайная погрешность производства продукции – составляющая погрешности производства продукции, случайным образом принимающая при неизменных условиях различные модуль и (или) знак.

Систематическая погрешность производства продукции – составляющая погрешности производства продукции, при неизменных условиях сохраняющая или принимающая закономерно изменяющиеся модуль и (или) знак.

Постоянная систематическая погрешность производства продукции – систематическая погрешность производства продукции, сохраняющая модуль и знак.

Переменная систематическая погрешность производства продукции – систематическая погрешность производства продукции, закономерно изменяющаяся по модулю и (или) знаку.

Статистический анализ точности и стабильности технологического процесса – установление статистическими методами значений показателей точности и стабильности технологического процесса и определение закономерностей его протекания во времени.

Точность технологического процесса – свойство технологического процесса, обуславливающее близость действительных и номинальных значений параметров по их распределению вероятностей.

Показатель точности технологического процесса – величина, количественно характеризующая точность технологического процесса.

Примечание. Примером показателя точности технологического процесса может служить разность между фактическим и номинальным значением параметров по их распределению вероятностей.

Стабильность технологического процесса – свойство технологического процесса, обуславливающее постоянство распределений вероятностей его контролируемых параметров в течение некоторого интервала времени без вмешательства извне.

Показатель стабильности технологического процесса – величина, количественно характеризующая стабильность технологического процесса.

Примечание. Примером показателя стабильности технологического процесса может служить среднее квадратическое отклонение контролируемого параметра.

Точностная диаграмма – графическое изображение зависимости одного или нескольких показателей точности или стабильности технологического процесса от времени.

Примечание. Различают эмпирическую точностную диаграмму, построенную на основе исследования существующего процесса, и теоретическую точностную диаграмму, построенную на основе статистических расчетов для прогнозирования точности и стабильности технологического процесса.

Статистическое регулирование технологического процесса – корректирование значений параметров технологического процесса по результатам выборочного контроля контролируемых параметров, осуществляемое для технологического обеспечения требуемого уровня качества продукции.

Примечание. Выборочный контроль для статистического регулирования технологического процесса осуществляется при помощи точечных проб или мгновенных выборок.

Статистически управляемый процесс – технологический процесс, в котором с помощью статистического регулирования обеспечивается точность и стабильность контролируемых параметров.

2. Вероятность и основы статистики [4]

2.1. Термины теории вероятностей

Случайная величина – переменная, которая может принимать любое значение из заданного множества значений и с которой связано распределение вероятностей.

П р и м е ч а н и е. Случайную величину, которая может принимать только определенные значения, называют дискретной. Случайную величину, которая может принимать любые значения из конечного или бесконечного интервала, называют непрерывной.

Распределение (вероятностей) – функция, определяющая вероятность того, что случайная величина примет какое-либо заданное значение или будет принадлежать заданному множеству значений.

П р и м е ч а н и е. Вероятность того, что случайная величина находится в области ее изменения, равна единице.

Функция распределения – функция, задающая для любого значения x вероятность того, что случайная величина X меньше или равна x .

$$F(x) = \Pr[X \leq x].$$

Плотность распределения (вероятностей) – первая производная, если она существует, функции распределения непрерывной случайной величины

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Функция распределения (вероятностей) масс – функция, дающая для каждого значения x дискретной случайной величины X вероятность p того, что случайная величина равна x :

$$p_i = \Pr[X = x_i].$$

Параметр – величина, используемая в описании распределения вероятностей некоторой случайной величины.

Корреляция – взаимозависимость двух или нескольких случайных величин в распределении двух или нескольких случайных величин.

П р и м е ч а н и е. Большинство статистических мер корреляции измеряют только степень линейной зависимости.

Математическое ожидание (случайной величины)

Для дискретной случайной величины X , принимающей значения x_i с вероятностями p_i , математическое ожидание, если оно существует, определяется формулой

$$\mu = E(X) = \sum p_i x_i,$$

где суммируют все значения x_i , которые может принимать случайная величина X .

Для непрерывной случайной величины X , имеющей плотность $f(x)$, математическое ожидание, если оно существует, определяют формулой

$$\mu_x = E(X) = \int x f(x) dx,$$

где интеграл берут по всему интервалу (интервалам) изменения X .

Дисперсия (случайной величины) – математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины

$$\sigma^2 = V(M) = E[X - E(X)]^2.$$

Стандартное отклонение (случайной величины) – положительный квадратный корень из значения дисперсии

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

Стандартизованная случайная величина – случайная величина, математическое ожидание которой равно нулю, а стандартное отклонение – единице.

П р и м е ч а н и е. Если случайная величина X имеет математическое ожидание μ и стандартное отклонение σ , то соответствующая стандартизованная случайная величина равна

$$\frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Распределение стандартизованной случайной величины называется стандартным распределением.

Коэффициент корреляции – отношение ковариации двух случайных величин к произведению их стандартных отклонений:

$$\rho = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sigma_x \sigma_y}.$$

П р и м е ч а н и я:

1. Эта величина всегда будет принимать значения от минус 1 до плюс 1, включая крайние значения.

2. Если две случайные величины независимы, коэффициент корреляции между ними равен нулю только в случае двумерного нормального распределения.

Равномерное распределение (прямоугольное распределение)

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины, плотность распределения вероятности которой постоянна на конечном интервале $[a, b]$ и равна нулю вне его.

Распределение вероятностей дискретной случайной величины такое, что

$$\Pr(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

для $i = 1, 2, \dots, n$.

П р и м е ч а н и е. Равномерное распределение дискретной случайной

величины имеет равные вероятности для каждого из n значений, то есть

$$\Pr_j = \frac{1}{n}$$

для $j = 1, 2, \dots, n$.

Нормальное распределение (распределение Лапласа – Гаусса) – распределение вероятностей непрерывной случайной величины X такое, что плотность распределения вероятностей при $-\infty < x < +\infty$ принимает действительное значение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right].$$

П р и м е ч а н и е. μ – математическое ожидание; σ – стандартное отклонение нормального распределения.

Стандартное нормальное распределение (стандартное распределение Лапласа – Гаусса) – распределение вероятностей стандартизованной нормальной случайной величины U , плотность распределения которой

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{u^2}{2} \right)$$

при $-\infty < u < +\infty$.

Двумерное нормальное распределение (двумерное распределение Лапласа – Гаусса) – распределение вероятностей двух непрерывных случайных величин X и Y такое, что плотность распределения вероятностей

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 \right] \right\}$$

при $-X < x < +X; -Y < y < +Y$;

где μ_x и μ_y – математические ожидания; σ_x и σ_y – стандартные отклонения распределений X и Y , которые нормальны; ρ – коэффициент корреляции X и Y .

2.2. Статистические термины

Единица (объект) – то, что можно рассмотреть и описать индивидуально.

Примечание. Единицей может, например, быть:

- изделие;
- определенное количество материала;
- услуга, действие или процесс;
- организация или человек.

Признак – свойство, которое помогает идентифицировать или различать единицы данной генеральной совокупности.

Примечание. Признак может быть количественным или качественным (альтернативным).

Совокупность (генеральная) – множество всех рассматриваемых единиц.

Примечание. Для случайной величины распределение вероятностей рассматривают как определение совокупности этой случайной величины.

Наблюдаемое значение – значение данного признака, полученного в результате единичного наблюдения.

Класс :

а) для качественного признака – определенные группы объектов, каждая из которых имеет отдельные общие признаки, взаимно исключают друг друга, исчерпывая все объекты;

б) для количественного признака – каждый из последовательных взаимоисключающих интервалов, на которые разделен весь интервал варьирования.

Частота – число наступлений события данного типа или число наблюдений, попавших в данный класс.

Относительная частота – частота, деленная на общее число событий или наблюдений.

Распределение частот – эмпирическое отношение между значениями признака и его частотами или его относительными частотами.

П р и м е ч а н и е. Это распределение можно представить графически в виде гистограммы, столбиковой диаграммы, полигона кумулятивных частот или как таблицу сопряженности двух признаков.

Гистограмма – графическое представление распределения частот для количественного признака, образуемое соприкасающимися прямоугольниками, основаниями которых служат интервалы классов, а площади пропорциональны частотам этих классов.

Столбиковая диаграмма – графическое представление распределения частот для дискретной случайной величины, образуемое набором столбцов равной ширины, высоты которых пропорциональны частотам.

Диаграмма разброса (рассеяния) – графическое представление множества точек, координаты которых x и y в обычной прямоугольной системе координат – это значения признаков X и Y .

П р и м е ч а н и я:

1. Множество из n элементов таким образом дает n точек, которые наглядно показывают зависимость между X и Y .
2. Концепцию диаграммы разброса можно распространить на более чем два признака.

Таблица сопряженности двух признаков – таблица, используемая для представления распределения двух признаков, в строках и столбцах которой указывают соответственно значения или классы первого и второго признаков, при этом на пересечении строки и столбца появляется частота, соответствующая данной комбинации значений или классов.

Среднее арифметическое – сумма значений, деленная на их число.

П р и м е ч а н и я:

1. Термин «среднее» обычно используют, когда имеют в виду параметр совокупности, а термин «среднее арифметическое» – когда имеют в виду результат вычислений по данным, полученным из выборок.

2. Среднее арифметическое простой случайной выборки, взятой из совокупности, – это несмещенная оценка арифметического среднего генеральной совокупности.

Выборочная дисперсия – одна из мер рассеяния, представляющая собой сумму квадратов отклонений наблюдений от их среднего арифметического, деленная на число наблюдений минус единица.

П р и м е ч а н и я:

1. Для серии из n наблюдений x_1, x_2, \dots, x_n со средним арифметическим

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$$

выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2.$$

2. Выборочная дисперсия – это несмещенная оценка дисперсии совокупности.

Выборочное стандартное отклонение – положительный квадратный корень из выборочной дисперсии.

П р и м е ч а н и е. Выборочное стандартное отклонение – это смещенная оценка стандартного отклонения совокупности.

Выборочная ковариация – сумма произведений отклонений x и y от их соответствующих средних арифметических, деленная на число наблюдаемых пар без единицы:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

где n – число наблюдаемых пар.

П р и м е ч а н и е. Выборочная ковариация – это несмещенная оценка ковариации совокупности.

Выборочный коэффициент корреляции – частное от деления выборочной ковариации двух показателей на произведение их выборочных стандартных отклонений:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 \sum_i (y_i - \bar{y})^2}},$$

где S_{xy} – выборочная ковариация X и Y ;

S_x и S_y – выборочные стандартные отклонения X и Y соответственно.

П р и м е ч а н и я:

1. Этот коэффициент часто используют как цифровое выражение взаимной зависимости между X и Y в серии парных наблюдений. Для проверки линейности можно строить диаграмму разброса.

2. Его значения всегда лежат между минус 1 и плюс 1. Когда выборочный коэффициент корреляции равен одному из указанных пределов, это означает, что существует точная линейная зависимость в серии парных наблюдений.

3. Этот выборочный коэффициент корреляции применяют для измеряемых признаков.

Оценивание (параметра) – операция определения на основе выборочных данных числовых значений параметров распределения, принятого в качестве статистической модели генеральной совокупности, из которой извлечена выборка.

П р и м е ч а н и е. Результат этой операции может быть выражен как одним числовым значением, так и доверительным интервалом.

Погрешность оценки – разность $(T - q)$ при оценивании параметра, где T обозначает результат оценки, а q – оцениваемый параметр.

П р и м е ч а н и е. Погрешность при оценивании может включать в себя один или несколько из следующих компонентов:

- погрешность выборочного метода;
- погрешность измерения;
- округление значений или разделение на классы;
- другие погрешности.

Смещение оценки – разность между математическим ожиданием оценки и значением оцениваемого параметра.

Критерий согласия распределения – мера соответствия между наблюдаемым распределением и теоретическим распределением, выбранным априори либо подобранным по результатам наблюдений.

Выбросы – наблюдения в выборке, отличающиеся от остальных по величине настолько, что возникает предположение, что они принадлежат другой совокупности или получены в результате ошибки измерения.

Степень свободы – в общем случае число слагаемых минус число ограничений, налагаемых на них.

2.3. Термины, относящиеся к наблюдениям и к результатам проверок

Измеримая величина (физическая величина) – признак явления, материала или вещества, который можно различить качественно и определить количественно.

П р и м е ч а н и я.

1. Термин «величина» может относиться к количеству в общем смысле, например длина, время, масса, температура, электрическое сопротивление, или к определенным установленным величинам, например длина определенного стержня, электрическое сопротивление определенной проволоки.

2. Величины, которые взаимно сравнимы, можно объединять в количественные категории, например:

- работа, тепло, энергия;
- толщина, периметр, длина волны.

3. Измеримые величины можно определить количественно.

Истинное значение величины – значение, которое идеальным образом определяет величину при тех условиях, при которых эту величину рассматривают.

П р и м е ч а н и е. Истинное значение – теоретическое понятие, которое нельзя определить точно.

Действительное значение величины – значение величины, которое для данной цели можно рассматривать как истинное.

П р и м е ч а н и я:

1. Действительное значение в общем смысле рассматривают как достаточно близкое к истинному значению, поскольку разница не имеет большого значения для данной цели.

2. Значение, приписанное в организации некоторому эталону, можно рассматривать как действительное значение величины, воспроизводимой этим эталоном.

Принятое нормальное значение – значение величины, служащее согласованным эталоном для сравнения и определяемое как:

а) теоретическое или установленное значение, основанное на научных принципах;

б) принятое или сертифицированное значение, основанное на экспериментальных данных некоторых национальных или международных организаций;

в) согласованное (на основе консенсуса) или сертифицированное значение, основанное на совместной экспериментальной работе, проводимой научным или инженерным коллективом;

г) когда а), б) и в) не подходят, математическое ожидание измеряемой

величины, то есть среднее арифметическое измерений конкретной совокупности.

Измеряемая величина – величина, подвергаемая измерению.

П р и м е ч а н и е. По обстоятельствам это может быть величина, измеряемая количественно или качественно.

Наблюдаемое значение – значение данного признака, полученное в результате единичного наблюдения.

Результат проверки – значение некоторого признака, полученное применением определенного метода проверки.

П р и м е ч а н и я:

1. Под проверкой можно понимать такие процедуры, как измерение, испытание, контроль и т.д.

2. В методе проверки должно быть уточнено, что будут выполнять одно или несколько индивидуальных наблюдений, что будут регистрировать в качестве результата проверки – их среднее арифметическое или иную подходящую функцию, такую как стандартное отклонение. В простом случае результат проверки – это само наблюдаемое значение.

Ошибка результата проверки – результат проверки минус принятое нормальное значение величины.

П р и м е ч а н и е. Ошибка – это сумма случайных ошибок и систематических ошибок.

Случайная ошибка результата проверки – компонент ошибки, который изменяется непредвиденным образом в ходе получения результатов проверки одного признака.

П р и м е ч а н и е. Случайную ошибку результата проверки нельзя скорректировать.

Систематическая ошибка результата проверки – компонент ошибки результата, который остается постоянным или закономерно изменяется в ходе получения результатов проверки для одного признака.

Пр и м е ч а н и е. Систематические ошибки и их причины могут быть известны или неизвестны.

Точность результата проверки – близость результата проверки к принятому нормальному значению величины.

Пр и м е ч а н и е. Понятие точности, когда его относят к результатам проверки, включает в себя комбинацию случайных компонентов и общего компонента систематической ошибки или смещения.

Правильность результата проверки – близость среднего значения, полученного в длинном ряду результатов проверок, к принятому нормальному значению величины.

Пр и м е ч а н и е. Меру правильности обычно выражают в терминах смещения.

Смещение результата проверки – разность между математическим ожиданием результатов проверки и принятым нормальным значением.

Пр и м е ч а н и е. Смещение – это общая систематическая ошибка в противоположность случайной ошибке. Может быть один или несколько компонентов, образующих систематическую ошибку. Большее систематическое смещение от принятого значения соответствует большому значению смещения.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АФО – активно-формирующие операции

АПО – активно-преобразующие операции

МПП – многослойная печатная плата

ОГП – основные геометрические параметры

ПФЭ – полный факторный эксперимент

ТП – технологический процесс

ФТО – фиксирующие технологические отверстия

ЧПУ – числовое программное управление

ШП – ширина проводника

ЭС – электронные средства

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ.....	3
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТОЧНОСТИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ.....	9
2.1. Общие положения.....	9
2.2. Этапы и методы построения математических моделей точности технологических процессов.....	11
2.2.1. Отбор факторов (входных переменных).....	11
2.2.2. Установление типа зависимости между исходными факторами и погрешностями обработки.....	17
2.2.3. Построение математической модели точности ТП.....	22
2.2.4. Проверка адекватности математической модели.....	37
3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ Н.А. БОРОДАЧЕВА.....	38
4. ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОКОМПРЕССИОННОЙ СВАРКИ.....	43
5. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА МНОГОСЛОЙНЫХ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ.	48
5.1. Основные геометрические параметры многослойных печатных плат.....	48
5.2. Технологический процесс изготовления МПП и его операционные погрешности.....	50
5.2.1. Погрешности размеров печатных элементов и монтажных отверстий	50
5.2.2. Погрешности расположения печатных элементов и монтажных отверстий	55
5.2.3. Учет погрешностей измерений	59

5.3. Математические модели размерной неустойчивости пленочных фотошаблонов и слоев МПП	61
5.4. Математическая модель распределения минимального пояса контактных площадок	75
5.5. Конструкторские и технологические расчеты с применением теоретико-вероятностных математических моделей.....	78
5.5.1. Определение оптимальных размеров контактных площадок	78
5.5.2. Определение необходимой точности сверлильного станка	80
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	83
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	85
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	100

Учебное издание

Иевлев Владимир Ильич

**АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ПРОИЗВОДСТВА
ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Редактор *И. В.Коришанова*

Подписано в печать 23.12.2010. Формат 60х80 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 5,92.
Уч.- изд. л.4,9. Тираж 50 экз. Заказ

Редакционно-издательский отдел УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
rio@ mail.ustu.ru
Ризография НИЧ УрФУ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19